

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :
MATHÉMATIQUES

Présentée par

Benjamin MAUROY

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'École Normale Supérieure de Cachan

Sur le sujet :

**HYDRODYNAMIQUE DANS LE POUMON,
RELATIONS ENTRE FLUX ET GEOMETRIES.**

Thèse soutenue le 5 Juillet 2004 et jugée par :

M. JEAN-MARC CHOMAZ	Rapporteur
M. LAURENT DESVILLETES	Co-directeur de thèse
M. MARCEL FILOCHE	Examineur
M. BERTRAND MAURY	Rapporteur
M. BERNARD SAPOVAL	Directeur de thèse
M. THOMAS SIMILOWSKI	Rapporteur
M. EWALD R. WEIBEL	Président du jury

Table des matières

1	Introduction & Motivations	9
2	Le poumon humain	13
2.1	Structure de l'arbre bronchique	14
2.2	La respiration	17
2.3	Conclusions	19
3	Flux dans l'arbre supérieur	
	(générations 1 à 6)	21
3.1	Modèles géométriques	23
3.2	Régime stationnaire inspiratoire	24
3.2.1	Equations de Navier-Stokes	25
3.2.2	Inspiration stationnaire : conditions en pression	26
3.2.3	Inspiration stationnaire : conditions en flux	35
3.2.4	Trajectoires de particules	37
3.2.5	Quelques remarques sur le régime expiratoire	39
3.3	Régime instationnaire	41
3.3.1	Techniques de simulation	42
3.3.2	Modèles à branchements symétriques	43
3.3.3	Modèle réaliste	49
3.4	Conclusion	53
4	Flux dans les petites bronches	
	(générations 7 à 17)	57
4.1	Hypothèses	58
4.1.1	Géométrie	58
4.1.2	Régime de Poiseuille	59
4.2	Résistance vs volume	65
4.2.1	Calculs de la résistance et du volume	65
4.2.2	Optimisation de la résistance à volume fixé : l'arbre optimal est fractal	67
4.2.3	Ecarts autour de l'arbre optimal, mise en évidence d'une marge de sécurité	69
4.2.4	Branches non homothétiques, application à l'asthme	72
4.3	Cas d'un arbre asymétrique	76
4.4	Conclusions	78

5	Flux dans l'acinus (générations 18 à 23)	81
5.1	Modélisation d'un acinus respirant	82
5.1.1	Hypothèses	82
5.1.2	Domaine : définitions & conditions de bord	84
5.1.3	Equations de Stokes en domaine variable - référentiel dépendant du temps	86
5.2	Résultats	87
5.3	Conclusion	90
5.4	Mise en oeuvre numérique, méthode par changement de variable	91
5.4.1	Eléments de Whitney 2D, définition et propriétés	92
5.4.2	Résolution de Stokes	96
5.4.3	Extension au problème de l'acinus	99
5.5	Vers une méthode de pénalisation	105
5.5.1	Cas simple	106
5.5.2	Pénalisation en domaine variable pour Stokes	109
6	Conclusions et perspectives	115
A	Considérations techniques sur les modèles géométriques	119
A.1	Paramètres géométriques des branches et pistons	119
A.2	Modélisation des branchements	120
A.2.1	Passage du modèle filaire au modèle 3D	120
A.2.2	Construction géométrique d'un branchement	123
A.3	Un peu d'informatique	124
B	Existence, unicité et propriétés de la solution des équations 5.2	127
B.1	Notations	127
B.2	Construction de l'approximation de la solution dans V_m	128
B.3	Estimations & existence	129
B.4	Existence de la pression	132
B.5	Propriétés de la solution	134
B.6	Conclusion	135

Remerciements

Je remercie Bernard pour m'avoir si bien guidé pendant ces quatre ans, ainsi que Marcel avec qui les discussions sont toujours très fructueuses. Merci au Professeur Weibel d'avoir été si disponible et de m'avoir appris tant de choses sur le poumon. Merci à José pour ses conseils en mécanique des fluides et pour m'avoir fait découvrir Fortaleza (en toute sécurité ...), à Marianna, entre autre pour avoir accepté de nous emmener faire du shopping un des rares jours où il y a des embouteillages monstres au Brésil, et à sa maman pour son excellent poisson. Merci à Maddalenna avec qui travailler est un réel plaisir. Merci à Hiroko pour ses modèles d'arbres bronchiques et d'acinus. Merci à Thomas, pour sa disponibilité, ses conseils et son soutien (je vous dois bien un pot ou deux !) et à Christian pour m'avoir tant appris sur la théorie de l'évolution. Les conversations à la Pitié ont toujours été très riches et si passionnantes ! Merci à François pour m'avoir fait découvrir les éléments finis de Whitney. Merci à Didier, pour sa patience et pour m'avoir guidé dans les méandres mathématiques des équations de Navier-Stokes. Merci à Laurent pour ses conseils toujours avisés. Enfin, un grand merci à Jean-Marc Chomaz, Bertrand Maury et Thomas Similowski pour avoir accepté de rapporter ma thèse.

Merci à Pascal pour avoir, entre autre, vérifié mille fois les services qui tournent sur mon ordinateur. Merci à papy pour être resté adolescent, à Céline pour m'avoir rechauffé les mains en Corse sous des yeux envieus, à Samy pour la joue de porc qui a rattrapé un réveillon et pour ses remarques très à propos sur les CDs audio. Merci à Junior pour s'être coupé les cheveux pour ma soutenance, à Seb pour m'avoir enseigné le coup du BM et à Bérenger pour ses excellentes crêpes (même s'il y a vraiment beaucoup beaucoup beaucoup trop de beurre ...). Merci à Véro pour sa disponibilité, et surtout pour sa jupe fendue, à Micheline, pour son statut de deuxième maman de tous les thésards. Merci à Joanna, Blandine et Céline dont le bureau a toujours été accueillant.

Merci à mes parents et à mes petites soeurs de toujours avoir l'air intéressés quand je leur parle de mon travail.

Merci à Amandine d'être toujours (je cite) "aussi mignonne" et pour son SMS de soutien post soutenance. Un grand merci à Ju pour tout un tas de choses qui mériteraient au moins une thèse pour en parler.

Enfin, un très grand merci à ma Mélo qui a su me conseiller, me motiver et me supporter pendant toute ma rédaction et sans laquelle je serais sans-doute devenu définitivement un zombie. Je la remercie aussi pour m'avoir appris à chasser le lézard vivipare, bête féroce s'il en est.

Sinon, je remercie tous les gens que j'ai oubliés et qui, par cet oubli, acquièrent le droit d'utiliser cette thèse pour caler leur téléviseur ou le bahut de leur grand-mère.

Résumé

Le poumon est un arbre dichotomique dont la taille des branches diminue avec la génération mais dont la surface globale augmente. Ainsi, avec une trachée de quelques centimètres carrés de surface, il distribue l'air sur une surface de l'ordre d'une centaine de mètres carrés. Ainsi, le poumon a une structure de type fractale. La vitesse décroît au fur et à mesure que l'on descend dans l'arbre et il peut être découpé en plusieurs régions où les flux sont gérés par des équations différentes.

Ainsi, dans les premières générations (un à six en régime respiratoire de repos), le flux est modélisé par les équations de Navier-Stokes en trois dimensions. Elles ont donc été simulées numériquement dans un modèle théorique de poumons à trois générations (logiciel N3S). Ces calculs ont montré que les effets d'inertie ont des conséquences importantes sur la structure en terme de répartition des flux : une seule structure idéale existe pour une répartition donnée du flux. Dans le contexte physiologique, les grandes variabilités existant non seulement entre les individus mais aussi au sein d'un même poumon au cours du temps, empêche une rigidité trop importante des contraintes géométriques. Ainsi, le poumon doit posséder une régulation active des flux. A noter qu'il reste néanmoins proche de la structure "idéale" trouvée. Des simulations en régime instationnaire ont montré qu'il existait une dissymétrie en terme de flux entre l'inspiration et l'expiration.

Dans les générations suivantes (sept à dix-sept en régime respiratoire de repos), les équations de Stokes gèrent la répartition des flux. Ces équations, linéaires, permettent une étude analytique du problème de dépendance des flux relativement à la géométrie. Ainsi, nous avons montré l'existence d'un optimal mathématique que nous avons comparé à des données réelles. Le poumon est presque optimum, tout en étant légèrement décalé. Ce décalage a été expliqué par le fait que les systèmes vivants sont soumis à des variabilités qui peuvent être dangereuses pour les structures parfaitement optimales. Ces résultats ont été approfondis grâce à une amélioration du modèle qui permet de simuler les crises d'asthme. Nous avons alors montré qu'une structure optimale est beaucoup plus fragile à ce type de dysfonctionnement qu'une structure sous-optimale.

Enfin, nous complétons, avec sa collaboration, les travaux de M. Felici, sur la diffusion de l'oxygène et du dioxyde de carbone dans les dernières branches du poumon. C'est en effet dans les générations dix-huit à vingt-trois (acinus) qu'a lieu la transition convection-diffusion du transport des molécules d'oxygène et de gaz carbonique. A ce niveau, le flux est créé par une succession de dilatations et de contractions de la géométrie au cours du temps. Le problème est donc géré par les équations de Stokes en domaine variable en temps. Après avoir vérifié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ces équations, nous avons développé un code, basé sur les éléments finis de Whitney et sur la méthode des caractéristiques, pour obtenir une approximation du champ des vitesses dans un modèle 2D d'acinus réalisé par H. Kitaoka. Les premiers résultats tendent à montrer que la diffusion est l'acteur principal de la circulation de l'oxygène et du dioxyde de carbone dans les trois dernières générations du poumon en régime de repos.

L'utilisation des mathématiques et des lois de la physique ont donc permis de mieux comprendre le pourquoi de la géométrie du poumon. Tous ces résultats sont issus d'une collaboration interdisciplinaire poussée entre des mathématiciens, des médecins et des physiciens.

Chapitre 1

Introduction & Motivations

La complexité des systèmes vivants, tant géométrique que fonctionnelle masque éventuellement que ce sont aussi des systèmes physiques. La compréhension du rôle des phénomènes physiques passe nécessairement par une étape de modélisation. Elle doit prendre le relais en simplifiant suffisamment le problème de façon à en extraire l'influence de chacun des paramètres. En les isolant et en les étudiant un à un, il est souvent possible de tirer des conclusions intéressantes sur le système global où ils interagissent tous les uns avec les autres. C'est le but du travail effectué dans cette thèse.

Ainsi, par exemple, le poumon doit amener de l'oxygène au contact du sang par l'intermédiaire d'un réseau de "tuyaux". Il doit aussi éliminer le dioxyde de carbone rejeté par le sang. Il lui faut donc coexister avec le phénomène respiratoire qui permet à l'inspiration, l'entrée de l'oxygène et à l'expiration, l'évacuation du gaz carbonique. Associés à cette complexité mécanique, de nombreux phénomènes physiques apparaissent, comme la mécanique des fluides, l'élasticité des tissus, la diffusion à travers des membranes, etc. Toute la complexité du problème vient donc de la coordination de ces effets, parfois contradictoires, et menant à certains compromis (optimisation). Ainsi, et c'est le rôle du chapitre 2, il est important de comprendre la structure et le fonctionnement du poumon humain avant de se lancer dans une étude de ses propriétés.

Bien qu'on ne puisse raisonnablement réduire l'étude du flux dans les poumons à de simples calculs indépendants du temps (stationnaires) dans des structures rigides, ils peuvent déjà nous en apprendre beaucoup. Le chapitre 3 est une application directe de cette méthode, avec en première partie une étude du flux dans un arbre rigide à sept branches avec des propriétés de symétrie facilitant la compréhension des phénomènes d'inertie. Les études systématiques des paramètres géométriques ont rendu nécessaire l'utilisation de la simulation numérique, qui une fois mise en place est très adaptative. Les premiers calculs, dont les applications dépassent même le cadre du poumon, ont d'abord montré que la répartition des flux dans un arbre n'est pas triviale et que l'on doit compter avec l'inertie du fluide. Ensuite, nous avons constaté des écarts importants entre les profils des flux à l'inspiration et à l'expiration, ce qui a été mis en parallèle avec leurs deux mécanismes, qui eux aussi s'avèrent différents. A partir de ces résultats, une comparaison de ces deux phénomènes en régime instationnaire s'est avérée indispensable pour confirmer les premières observations, cela a débouché sur la proposition de modèles

mécaniques inspiratoire et expiratoire. Enfin nous avons travaillé sur un modèle plus réaliste (modèle de H. Kitaoka [30]), permettant d'appliquer nos résultats et conclusions dans un cadre proche du vrai poumon.

Le pourquoi des formes et des mécanismes est un enjeu de taille que ce soit par exemple dans un but thérapeutique pour mieux comprendre les pathologies ou bien dans un but académique afin de mieux décrypter les choix de l'évolution. Or, la nature est le siège d'une grande variabilité, même entre membres d'une même espèce. Dans le chapitre 4 nous étudions l'influence de cette variabilité sur la structure fractale du poumon, simplification raisonnable au niveau des bronchioles. En comparant les résultats théoriques optimaux avec des mesures effectuées dans un poumon humain, nous avons observé l'existence d'une marge de sécurité qui autorise une certaine variabilité de sa structure et qui permet des adaptations de la taille de ses bronches sans pour autant augmenter trop sensiblement sa résistance respiratoire. Ce décalage à l'optimalité physique montre que la variabilité physiologique, que ce soit entre les individus ou au cours du temps chez un même sujet, intervient elle aussi dans le "design" des êtres vivants. Ainsi, les optimaux physiques ne doivent pas systématiquement être les seuls critères considérés pour expliquer les phénomènes physiologiques.

L'air parcourt les poumons à des vitesses très différentes, grandes à l'entrée, elles décroissent rapidement et deviennent négligeables en comparaison des vitesses de diffusion tout au fond de l'arbre pulmonaire. Il existe ainsi une zone de transition entre la convection et la diffusion. La localisation de cette zone en fonction du régime respiratoire permettra de déterminer numériquement la portion de surface effectivement active au cours de la respiration et dans les différents régimes respiratoires. Ainsi, les mesures des efficacités au repos et à l'exercice devraient préciser les résultats obtenus par M. Felici [19], qui mettent en évidence l'existence d'un effet d'*écrantage*, à l'origine d'une réserve d'efficacité permettant des pointes de consommation comme l'exercice. A nouveau, on observe une marge de manoeuvre dans la structure du poumon. Cette investigation de la transition convection-diffusion passe par la mise au point d'outils numériques appropriés. C'est le thème du chapitre 5, où nous calculerons les vitesses de l'air dans un sous-acinus. Ce chapitre doit être considéré comme les préliminaires de l'étude de la transition convection-diffusion.

Les problèmes rencontrés, issus de la physique, soulèvent des questions mathématiques quant aux outils à utiliser. Ainsi, tous les résultats sont obtenus grâce à un travail mathématique, qui a abouti soit à l'utilisation approfondie de codes numériques déjà écrits, soit au développement direct de solutions numériques ou théoriques. Ainsi, nous utilisons des outils issus de la théorie de l'optimisation (chapitre 4), de l'analyse numérique (en tant qu'utilisateur au chapitre 3 et en tant que réalisateur au chapitre 5) et étudions les propriétés d'une équation issue du chapitre 5 à l'aide de l'analyse fonctionnelle (Annexe B). Ces outils sont intrinsèquement liés aux problèmes physiques et physiologiques en jeu.

Tous ces travaux ont permis d'améliorer la compréhension du système pulmonaire, en particulier nous avons extrait de nos modèles certains paramètres indispensables au bon fonctionnement du poumon. La poursuite de ces études a pour but la création d'un "pou-

mon numérique” dont cette thèse et celle de M. Felici [19] sont les bases. La construction d’un modèle complet peut avoir des conséquences médicale, en particulier pour l’aide au diagnostic. Beaucoup d’autres applications sont envisageables, comme l’étude du dépôt des particules qui permettra une meilleure prévision des zones de développement des cancers du poumon.

Cette thèse, dirigée par Bernard Sapoval (PMC, Ecole Polytechnique et CMLA, ENS Cachan), a été effectuée en collaboration avec les physiciens Marcel Filoche (PMC, Ecole Polytechnique et CMLA, ENS Cachan) et José Soares Andrade Jr (Université de Ceará, Brésil). Pour les parties mathématiques nous avons collaboré avec Didier Bresch (LMC, Grenoble), François Alouges (Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay) et Laurent Desvillettes (CMLA, ENS Cachan). Enfin nos collaborations médicales sont le fait de Ewald R. Weibel (Institut d’Anatomie, Berne, Suisse), Thomas Similowski et Christian Straus (UPRES EA 2397, Paris VI et Service de Pneumologie, La Pitié-Salpêtrière). Ces travaux sont donc fondamentalement interdisciplinaires.

Chapitre 2

Le poumon humain

Base du métabolisme chez la plupart des êtres vivants connus, l'oxygène doit être distribué dans tout l'organisme où il est "brulé" par les mitochondries et converti en énergie. Cette combustion libère du dioxyde de carbone (CO_2), qui doit être évacué. Des mécanismes de distribution complexes et très efficaces sont donc nécessaires. En se restreignant à la classe des mammifères, l'oxygène est amené aux cellules et le dioxyde de carbone éliminé par l'intermédiaire de deux structures complémentaires et entremêlées (voir figure 2.1) : le réseau sanguin et l'arbre respiratoire. Le réseau sanguin relie chaque cellule aux poumons, qui sont à la fois réserve d'oxygène et épurateur de dioxyde de carbone. L'oxygène circule dans le réseau sanguin fixé sur les hématies (globules rouges) et est libéré petit à petit à la demande des cellules. Au contraire, le dioxyde de carbone est dissout dans le liquide sanguin englobant les hématies. En amont du poumon, le sang est pauvre en oxygène et riche en dioxyde de carbone, il est alors de couleur bleue et appelé sang veineux. En aval du poumon, le sang est saturé en oxygène et est pauvre en dioxyde de carbone, sa couleur est rouge, on parle de sang artériel. La circulation du sang, rythmée par le cœur, vit donc un événement cyclique important : la traversée du poumon. Quatre-vingt-dix pour cents du volume pulmonaire est rempli par les acinus, succession de branches recouvertes de petits sacs, les alvéoles, remplis par un gaz de composition proche de l'air (gaz alvéolaire). C'est à la surface des alvéoles, perméable à l'oxygène et au dioxyde de carbone, qu'ont lieu les échanges entre l'air et les capillaires sanguins, lesquels recouvrent toute la paroi. La surface d'échange totale au niveau des alvéoles correspond à une centaine de mètres carrés. Une aussi grande surface est nécessaire pour couvrir les besoins énergétiques (et autoriser des pointes de consommation, par exemple en régime d'exercice). Néanmoins, le volume disponible reste limité et cette surface est repliée sur elle-même. Or l'air dans les alvéoles doit être régulièrement réenrichi en oxygène et réappauvri en dioxyde de carbone pour que le système fonctionne. Il faut donc disposer d'une structure et d'un mécanisme étant capables d'alimenter, dans les deux sens, cette surface repliée (on peut d'ores et déjà utiliser le mot fractal). C'est le rôle de l'arbre bronchique et de la respiration. L'arbre bronchique est déjà en lui-même source de complexité. De par sa structure arborescente particulière, la distribution des flux en son sein n'est pas triviale. Si on ajoute à cela le phénomène respiratoire, dans lequel apparaissent des indices de l'existence du chaos, on voit que l'on se heurte à un problème difficile à maîtriser dans son ensemble.

2.1 Structure de l'arbre bronchique

Le rôle de l'arbre bronchique est de conduire l'air ambiant, riche en oxygène et pauvre en dioxyde de carbone, vers la surface d'échange avec le sang à l'intérieur des acinus. La figure 2.1 montre le moulage d'un poumon humain. La complexité de la structure est frappante. On peut observer que la géométrie est arborescente, et plus précisément, que cet arbre est quasiment dichotomique. Cette remarque permet de le considérer comme une succession de générations, voir figure 2.2. Cette terminologie, très pratique, est utilisée tout au long des études qui vont suivre. La première génération correspond à la plus grosse branche, la trachée. Elle a un diamètre de l'ordre de deux centimètres. La dernière est située au fond de l'acinus, à la vingt-troisième génération, elle a un diamètre de l'ordre du demi-millimètre. Le nombre de branches de cet arbre est donc a peu près de 2^{24} soit plus de seize millions, mais la surface d'échange est "au fond".

Le poumon peut être divisé en deux régions de fonctionnement distinctes, la première, l'arbre bronchique, constitue les dix-sept premières générations et a pour seul rôle la conduction de l'air vers les dernières générations que constituent les acinus (on parle d'espace-mort). Un acinus est un sous-arbre du poumon d'à peu près six générations (depuis la dix-huitième jusqu'à la vingt-troisième), leur nombre est de l'ordre de 30000. A ces profondeurs, les branches sont recouvertes d'alvéoles et deux phénomènes y sont a priori couplés : la convection de l'air et les échanges gazeux entre l'air et le sang. Outre la présence des alvéoles, il existe une rupture dans les propriétés géométriques du poumon quand on passe de l'arbre bronchique aux acinus, par exemple les diamètres des bronches, qui diminuent tout au long des dix-sept premières générations, se stabilisent dans les générations acinaires [63].

Considérons d'abord les propriétés géométriques de l'arbre bronchique. Les bronches ont une forme cylindrique, légèrement cônica vers le bas de l'arbre. Leur surface est annelée par la structure cartilagineuse recouvrant les premières générations de bronches. Ce cartilage disparaît petit à petit quand la génération augmente, laissant place à un muscle le long de la paroi, le muscle lisse. Il est capable de modifier le diamètre des petites bronches, mais sa véritable fonction reste encore inconnue. Il pourrait, par exemple aider à réguler les flux d'air ou bien protéger les bronchioles de l'obstruction. Une muqueuse protège la surface de toutes les bronches. Celles qui sont recouvertes de cartilages sont plutôt rigides (trachée, grosses bronches) tandis que les bronchioles ont une géométrie beaucoup plus souple, et leur taille peut varier, par exemple au cours de la respiration.

Les branchements, dichotomiques, sont sujets à une certaine dissymétrie, très amplifiée dans les premières générations qui s'adaptent à l'anatomie globale. Par exemple, les premières branches doivent contourner le coeur et divisent le poumon de façon asymétrique, en trois lobes droits et deux lobes gauches. Elles deviennent moins irrégulières et même quasiment homothétiques d'une génération à l'autre à mesure que l'on s'enfonce dans l'arbre. Le facteur d'homothétie varie en fait assez peu entre les générations, comme le montre la figure 4.8. Enfin, citons quelques propriétés qui nous intéresseront particulièrement dans la suite : les branchements sont coplanaires, les angles entre deux plans de branchements successifs sont proches de quatre-vingt-dix degrés et le rapport longueur

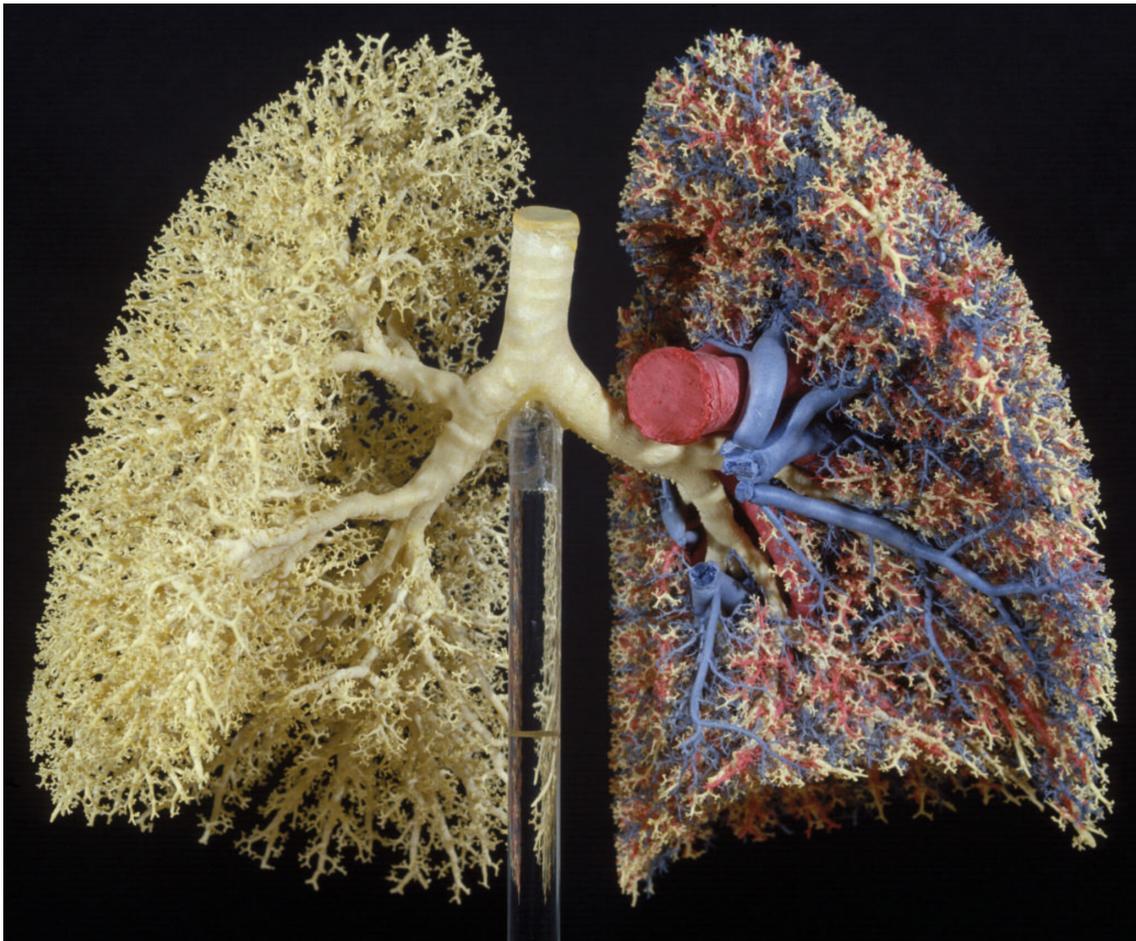


FIG. 2.1 – Moulage de poumons humains effectué par E.R. Weibel. Les bronches sont colorées en jaune, les artères en rouge et les veines en bleu.

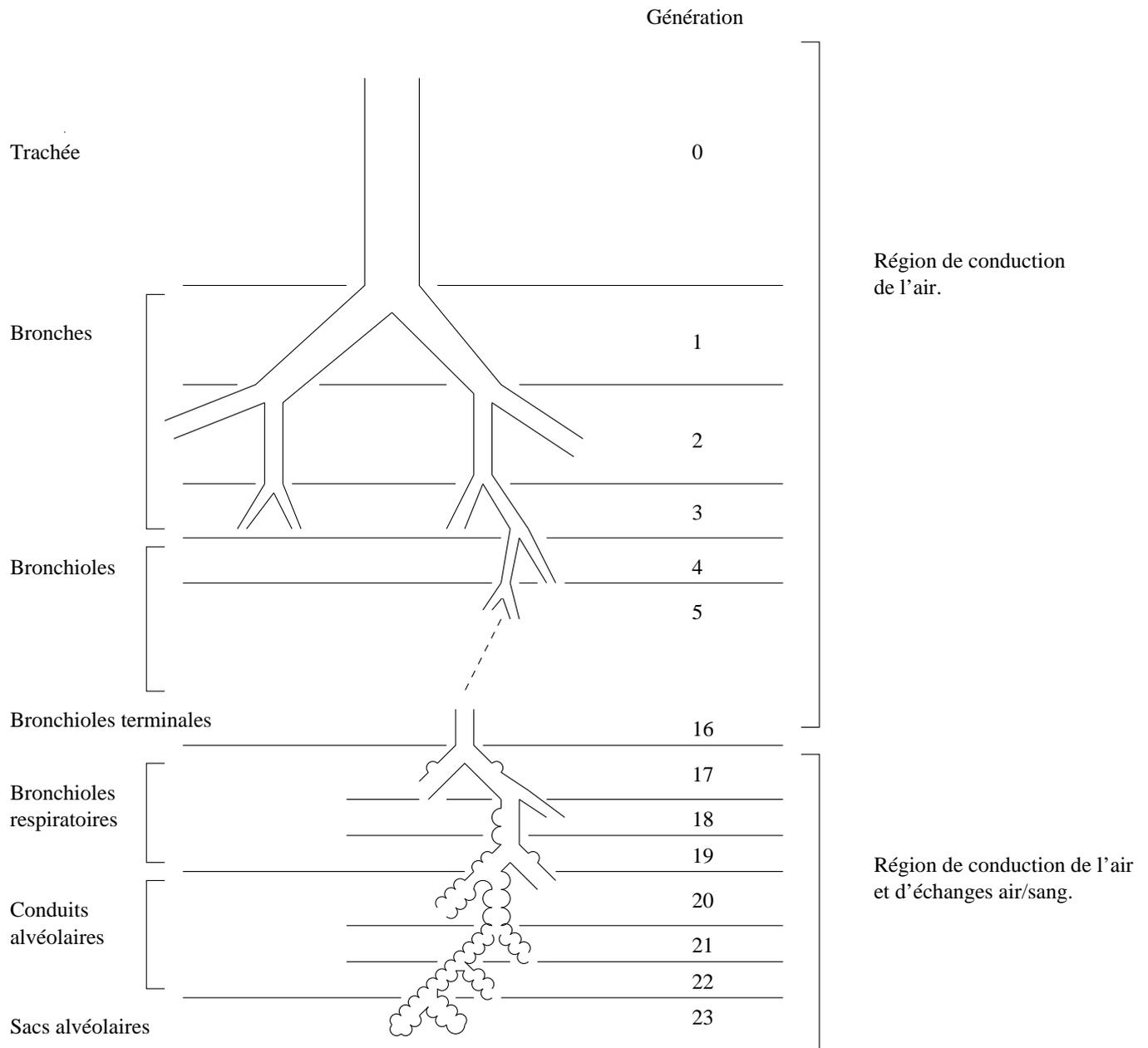


FIG. 2.2 – Structure et terminologie du poumon.

sur diamètre des branches est de l'ordre de trois dans tout l'arbre. Toutes ces propriétés sont des observations moyennes, en effet en tant que matière vivante, le poumon est soumis à l'inévitable variabilité physiologique qui existe entre les individus (due aux contraintes géométriques, à l'environnement, etc.).

Les acinus sont des arbres dichotomiques constitués de branches de diamètres quasiment identiques ($\sim 0.5 \text{ mm}$). Les alvéoles recouvrent de plus en plus les branches à mesure que l'on s'enfonce dans la structure. Les acinus remplissent la majeure partie du volume disponible (90% du volume total du poumon). Dans ces générations, l'air se déplace très lentement et la diffusion a un rôle important dans le transport de l'oxygène et du dioxyde de carbone dans les bronches. C'est encore la diffusion, à travers une membrane, qui gère les transferts des molécules entre le gaz alvéolaire et le sang.

2.2 La respiration

L'arbre bronchique est donc un ensemble de "tuyaux" reliant les acinus au milieu extérieur. Une telle structure présente une résistance hydrodynamique et y créer un flux nécessite un mécanisme : la respiration. En augmentant son volume, le poumon va d'abord créer une dépression entre ses acinus et l'air ambiant. Ainsi, un flux d'air est créé depuis l'extérieur vers l'intérieur de l'arbre pulmonaire. Ce flux alimente les acinus en air frais. Ensuite le poumon se vide en comprimant son volume, ce qui crée une surpression dans la structure relativement à l'air extérieur, le gaz pulmonaire est alors évacué. Tout au long de ce cycle le sang et le gaz alvéolaire s'échangent de l'oxygène et du dioxyde de carbone. La respiration sert à réguler les concentrations de ces deux molécules (c'est à dire rehausser la concentration en oxygène et réduire la concentration en dioxyde de carbone). Comme le poumon est un arbre, les vitesses sont très différentes entre l'entrée au niveau de la trachée et les acinus, ainsi au repos les vitesses dans la trachée sont de l'ordre de 1 m.s^{-1} tandis qu'elle descend à une fraction de centimètre par seconde à l'entrée de l'acinus. Une telle répartition des vitesses est une propriété qui nous sera très utile au moment de la modélisation, en distinguant différents régimes de circulation de l'air dans l'arbre pulmonaire (régime avec inertie de Navier-Stokes ou régime lent de Stokes).

D'un point de vue mécanique, la respiration est un phénomène complexe mettant en jeu les muscles du thorax, les articulations des côtes et l'élasticité des tissus pulmonaires. La situation mécanique est très différente selon que le poumon est en inspiration ou en expiration. L'inspiration est induite par la contraction du diaphragme et de quelques autres muscles au niveau des côtes. Le diaphragme est un muscle fixé à la base des poumons. A l'inspiration, en imposant un mouvement de haut en bas à la base des poumons, le diaphragme va augmenter le volume pulmonaire, le poumon réagissant par un effet "éponge" (en se dilatant, sa structure transmet le mouvement à ses parties supérieures). Mais comme le diaphragme appuie aussi sur le contenu du ventre, son déplacement va être transmis aux côtes, qui vont entamer un mouvement d'écartement d'amplitude décroissante du bas vers le haut. Ainsi les parties latérales du poumon vont, elles aussi, se gonfler (mais dans une moindre mesure que la base). Les muscles inter-

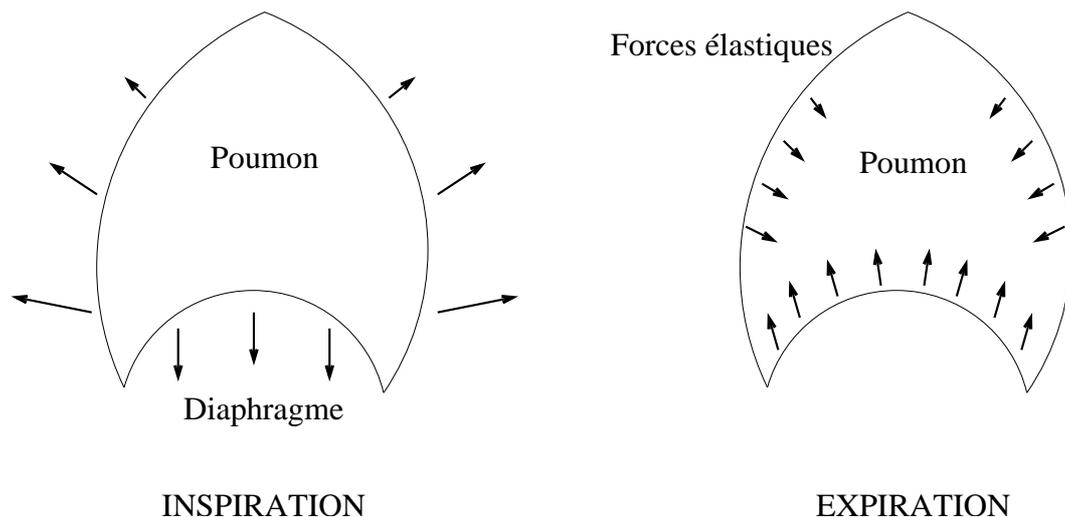


FIG. 2.3 – Pendant l’inspiration, le diaphragme tire sur la base du poumon pour le dilater. En même temps, il appuie sur le contenu du ventre qui transmet le mouvement aux côtes qui s’écartent tout autour du poumon pour en dilater les régions latérales et supérieures (dans une moindre mesure). L’inspiration est donc la conséquence d’une action globale sur l’arbre. A l’expiration, les muscles sont relâchés et les tissus dilatés par l’inspiration reprennent leurs formes initiales. L’effort musculaire expiratoire est très faible, le poumon se dégonfle majoritairement par élasticité. Ainsi l’expiration est le résultat d’actions locales.

costaux accompagnent le mouvement des côtes et empêchent qu’il n’ait un effet de compression à certains endroits, particulièrement au sommet du poumon. L’inspiration a une durée moyenne de deux secondes. L’inspiration est un phénomène actif, car elle est basée sur un effort musculaire, contrôlable. A noter que les forces intervenant ont plutôt un effet global.

Le phénomène expiratoire est très différent. En effet à l’issue de l’inspiration, les tissus ont été tendus et ils ont emmagasinés de l’énergie élastique. Leur position d’équilibre étant la position initiale avant l’inspiration. Ainsi, pour simplifier, expirer revient à relâcher les muscles utilisés à l’inspiration, les forces de rappel élastiques étant à l’origine de la compression du volume pulmonaire. Cette force est toutefois accompagnée par quelques muscles qui retiennent le mouvement afin qu’il ne soit pas trop rapide, ces muscles n’ont néanmoins qu’une petite influence. L’expiration est qualifiée de passive, car la majeure partie des forces en jeu, qui sont des forces élastiques (donc locales), n’est pas directement contrôlable. L’expiration dure environ trois secondes.

La respiration est donc asymétrique au cours du temps et fait intervenir les propriétés élastiques du poumon. Ces propriétés ne sont pas homogènes dans l’arbre pulmonaire, accroissant encore le niveau de complexité du problème. A noter que la classe des mammifères est caractérisable par une respiration basée sur l’existence d’un diaphragme.

2.3 Conclusions

Le poumon est donc une structure arborescente de vingt-trois générations dont les fonctions sont assurées grâce à la mécanique de la respiration et aux phénomènes de diffusion. Structure et mécanisme ont chacun leur complexité. Notre travail, plutôt basé sur l'étude de la géométrie va néanmoins montrer qu'il existe un lien important entre les deux. Ce lien n'est bien-entendu pas surprenant, le poumon étant le résultat d'une longue évolution parallèle de ces deux complexités. Ce qui les relie est la nécessité de distribuer de façon "raisonnable" les flux dans la structure. Ainsi, nos études sur la dépendance du flux à la géométrie sont liées d'une façon ou d'une autre à la respiration. Nos premiers modèles, stationnaires, laissent déjà apparaître des différences entre les flux inspiratoires et expiratoires. Du point de vue de la mécanique des fluides, vouloir faire entrer de l'air dans un arbre est en effet bien différent de vouloir le faire sortir. Ces résultats sont précisés par des études dans des modèles instationnaires. Les premières conclusions laissent entendre que l'inspiration est plus difficile à mettre en oeuvre d'un point de vue énergétique que l'expiration, ce qui s'accorderait avec le fait que l'inspiration soit plutôt un phénomène actif. Enfin, nous nous apercevons que l'arbre doit aussi avoir des propriétés géométriques particulières pour que la respiration ne consomme pas trop d'énergie. Plus précisément, nous montrerons que le poumon réel est protégé dans une certaine mesure de la variabilité intrinsèque aux systèmes physiologiques.

Chapitre 3

Flux dans l'arbre supérieur (générations 1 à 6)

La circulation d'un fluide dans un arbre est un problème courant en physique, en géologie et en physiologie. Par exemple on peut citer les flux à travers des milieux poreux, la circulation du sang et la respiration. Quand on étudie le transport dans un de ces systèmes, le principal objectif est de comprendre les mécanismes qui gouvernent la répartition des flux au niveau des bifurcations. Jusque récemment, il était en général supposé que les lois de Poiseuille étaient suffisantes pour décrire la propagation du flux à travers des structures branchées. Ces lois relient linéairement le flux et la chute de pression, $\Phi \propto \Delta P$ (voir partie 4.1.2 et plus précisément l'équation 4.3), ce qui n'est vrai que pour de petits nombres de Reynolds. Cependant de nombreuses études ont été menées sans tenir compte de cette restriction. Dans le contexte des milieux poreux par exemple, on peut représenter le flux à travers le matériau comme la distribution d'un courant électrique dans un réseau de résistances. Par nature ce genre de modèle ne peut prévoir qu'une répartition synchrone du flux à travers des structures branchées [40]. Or la principale difficulté lors de la modélisation d'un flux dans un arbre est due aux effets d'inertie qui, à des nombres de Reynolds même modérés, rendent les lois de Poiseuille invalides car les forces d'inertie deviennent importantes devant la viscosité. Des expériences et simulations numériques ont montré sans aucune ambiguïté l'existence des effets d'inertie dans les structures branchées et plus particulièrement dans l'arbre bronchique [24, 55, 56, 54, 28, 1, 59, 69, 2, 70, 33, 16, 15].

Les vitesses de l'air à l'intérieur du poumon sont très différentes selon que l'on considère l'entrée (quelques centimètres carrés : la section de la trachée) ou les extrémités (une centaine de mètres carrés, dans les 2^{17} acinus). Les vitesses couvrent une gamme allant d'une vitesse quasi nulle au niveau des acinus, où le transport de l'oxygène et du dioxyde de carbone est effectué par diffusion, jusqu'à quelques mètres par seconde à l'entrée des poumons. L'amplitude de cette gamme dépend du régime respiratoire : en régime d'exercice, qui ne sera pas étudié ici, entrent en jeu des effets de turbulence dûs aux nombres de Reynolds importants (jusqu'à 10000) qui apparaissent dans la trachée et les premières bronches. Au repos, les vitesses de l'air dans la trachée sont de l'ordre de $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et à partir de la dix-huitième génération, on peut négliger la vitesse globale de l'air relativement aux vitesses de diffusion [63]. Dans ces conditions le nombre de Rey-

nolds (nombre sans dimension correspondant au rapport inertie sur forces visqueuses du fluide, voir 3.2.1) atteint des valeurs de l'ordre de 1000 dans les premières bronches, et des effets d'inertie déjà importants apparaissent. Lors de la répartition du flux d'air dans ses sous-parties, le poumon doit donc tenir compte de l'influence de l'inertie qui va créer des préférences directionnelles. La géométrie compense-t-elle l'inertie ? Existe-t-il des structures idéales qui répartirait les flux de façon homogène ? Un système vivant peut-il les réaliser ? Les réponses à ces questions sont essentielles pour comprendre si le poumon est géométriquement efficace ou si une régulation des flux est nécessaire (par exemple par adaptation dynamique de la géométrie, fonctionnalité que le muscle lisse pourrait remplir).

Pour comprendre les phénomènes en jeu, il est plus simple de travailler avec des géométries symétriques [32, 38]. En particulier, pour irriguer uniformément un volume symétrique, un simple argument de “collage” montre qu'il faut utiliser un arbre symétrique. En effet, supposons qu'un arbre dissymétrique remplisse un volume qui a un plan de symétrie. L'arbre étant dissymétrique, le flux sera différent dans les deux parties symétriques du volume. En choisissant le demi-arbre qui est le plus “efficace” et en en faisant l'image miroir relativement au plan de symétrie, on obtient un nouvel arbre, désormais symétrique qui est plus efficace dans sa distribution du flux. Ainsi, dans le cadre de l'approximation de Poiseuille, le seul moyen pour avoir une parfaite symétrie en flux est d'utiliser un réseau symétrique. A chaque bifurcation, les branches-filles doivent être identiques indépendamment du contexte géométrique. Cela peut être faux en présence d'effets d'inertie. De plus, le poumon étant une succession de branchements, le flux final est la conséquence d'un processus multiplicatif. Ainsi, même une petite dissymétrie à chaque bifurcation peut entraîner une forte inhomogénéité du flux global [46]. Comme la géométrie des poumons des mammifères est toujours le siège d'une certaine variabilité physiologique [49], il est intéressant de se demander dans quelle mesure une modification de la structure peut perturber la distribution des flux.

Le flux d'air dans un modèle de poumon théorique à trois générations a donc été étudié par simulations numériques. Cet arbre est destiné à remplir de façon homogène quatre volumes identiques. Nous avons quantifié la rupture de symétrie des flux de sortie qui, en régime lent (Poiseuille), seraient répartis avec égalité. L'influence de certains paramètres géométriques a été étudiée, en particulier pour déterminer la sensibilité du système aux “défauts” géométriques.

Nos premiers résultats, en régime stationnaire, ont confirmé que la distribution homogène des flux ne pouvait se faire que par une géométrie parfaitement symétrique. Toutefois, cette répartition est très sensible aux variations : un léger écart entraîne un rapide déséquilibre, dû au profil de vitesses très particulier dans la deuxième génération : la *M - shape* [48]. La réduction du nombre de Reynolds mène progressivement à une homogénéisation du flux dans toute la structure et un seuil a été déterminé : pour un Reynolds inférieur à 100, les effets d'inertie peuvent être négligés. Ainsi, en régime respiratoire de repos, ces effets sont négligeables dès la sixième génération. Grâce à ce seuil, les générations suivantes peuvent être étudiées analytiquement, voir le chapitre suivant 4.

L'introduction du temps dans les simulations a permis un progrès significatif du point de vue du réalisme de nos résultats. Des pistons ont été placés à chacune des sorties de la géométrie, ils vont créer les flux inspiratoire et expiratoire, successivement par dilatation puis contraction et ceci de façon cyclique. Ainsi le flux provient, comme dans les poumons, du déplacement du fond de la géométrie. Ces simulations, beaucoup plus coûteuses en temps, ont entre autre permis de valider nos calculs stationnaires. Elles ont aussi mis en évidence une dissymétrie importante entre les flux inspiratoire et expiratoire, ce qui sous-entend une mécanique elle aussi dissymétrique. L'inspiration est sujette à certaines inhomogénéités en pression qui n'existent pas à l'expiration. Tout ceci est cohérent avec les caractères respectivement actif et passif des moteurs mécaniques de l'inspiration et de l'expiration.

3.1 Modèles géométriques

Les poumons ne branchent pas toujours de façon symétrique, surtout dans les premières générations qui ajustent l'arbre à la géométrie de la cage thoracique, par exemple pour éviter l'emplacement du coeur (le meilleur moyen de minimiser la résistance avec une contrainte volumique est en effet de compenser dès les premières générations, voir chapitre 4). Néanmoins comprendre la complexité d'un flux dans une structure asymétrique est très difficile car on ne peut pas, a priori, retrouver aisément des patterns entre entrées et sorties (voir 3.3.3 pour un exemple de flux dans un arbre non symétrique). Il est donc intéressant de travailler en premier lieu avec un arbre présentant des propriétés de symétrie et d'étudier ses effets sur le flux. Plus précisément, on veut répondre à la question : retrouve-t-on la symétrie de la géométrie dans la structure des flux ? Ainsi la plupart des modèles utilisés branchent de façon symétrique : les branches d'une même génération sont identiques. L'arbre possède un axe de symétrie correspondant à l'axe du cylindre de la première génération. Certaines propriétés des poumons sont toutefois conservées : la taille des bronches est réaliste et les branchements se font dans un même plan (voir figure 3.3, où les triplets de branches ABC, BDE et CFG définissent chacun un plan). Ce type de géométrie correspond à un modèle de *poumon* dont le rôle est de remplir de façon homogène des volumes identiques situés à chacune de ses extrémités. Les conditions imposées à ces sorties seront identiques pour simuler un mécanisme lui aussi symétrique (mouvement induit par pressions ou flux imposés). Le nombre de générations de ces modèles est limité à trois, ce qui, du point de vue du maillage, permet d'utiliser une taille de maille moyenne constante dans toute la géométrie, tout en conservant un nombre d'éléments raisonnable (de l'ordre de 300000).

Les bronches sont modélisées par des cylindres lisses. Bien que leur structure annelée crée des ondulations sur leur surface, l'effet sur les flux reste négligeable car les vitesses sont faibles le long des parois, ce qui est cohérent avec des conditions aux bords de non-glissement. Enfin, on peut noter que les bronches ont une forme très légèrement cônica, c'est néanmoins suffisamment faible pour être négligé en première approximation. Ainsi des cylindres lisses sont de bons compromis. En pratique, les cylindres ont été "discrétisés" en cylindres polygonaux dont les bases sont des polygones à seize côtés. Les

bifurcations jouent le rôle de séparatrices de flux, leurs formes sont donc importantes et dans les poumons ce sont des parties relativement complexes. En effet, l'intersection des trois branches d'une bifurcation est surmontée d'une languette de cartilage qui adoucit l'angle et guide l'air dans les différentes bronches. La modélisation de ces languettes étant assez complexe du point de vue du maillage, nous avons choisi de les représenter par une intersection assez anguleuse, sans toutefois créer de singularité. Les bifurcations ont donc pu être modélisées simplement, en traçant des segments entre les sommets des polygones formant les bases des cylindres, comme le montrent les figures 3.1 et A.4. Pour plus de détails voir l'annexe A.

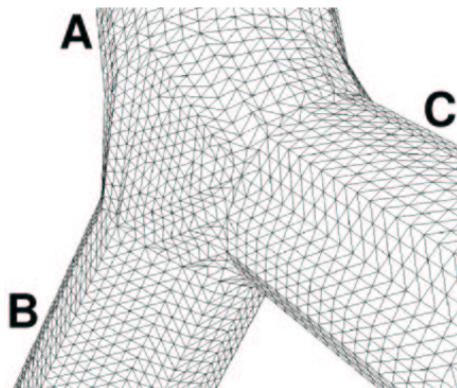


FIG. 3.1 – Géométrie et maillage d'une bifurcation. A est la branche mère, B et C sont les branches filles. Le nombre de total d'éléments est de l'ordre de 300000.

Enfin, comme la simulation dans tout l'arbre est hors de portée aujourd'hui, seules trois générations sont considérées. Le modèle de gauche de la figure 3.2 est utilisé dans le cas des conditions de pression en sortie. Le modèle de droite est utilisé pour imposer les flux aux quatre sorties. Les tubes de la troisième génération s'évasent pour simuler les générations suivantes, créant une aspiration provenant de toutes les directions. Cela correspond à une homogénéité de pompage des petites bronches, que l'on peut considérer distribuées de façon quasi homogène dans les poumons. Ce modèle est aussi utilisé en régime non stationnaire : les parties évasées fonctionnant comme des pistons, leurs mouvements créant le flux dans la structure. A noter que l'on utilisera, un peu abusivement, le terme *trachée* pour parler de la branche de la première génération.

Toutes ces géométries sont réalisées automatiquement par un programme en C++ (*doc2dat*) qui gère la plupart des paramètres. Pour plus de détails (techniques) sur les programmes, les mesures des angles et longueurs, voir l'annexe A.

3.2 Régime stationnaire inspiratoire

Le régime stationnaire a le mérite de demander un temps de calcul raisonnable tout en conservant une signification physique quand les temps de relaxation ne sont pas trop importants, ce qui est le cas pour le poumon (voir 3.3.2 pour la validation des résultats stationnaires). Une étude systématique de certains paramètres de la géométrie a donc pu

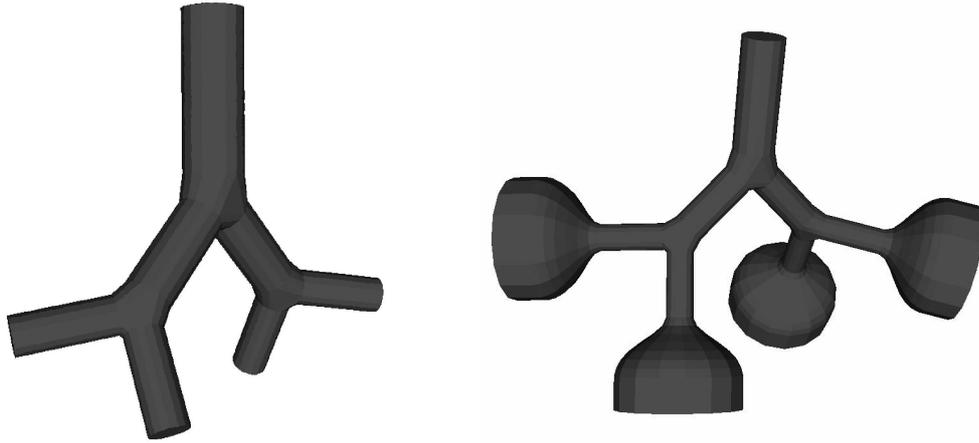


FIG. 3.2 – Les modèles utilisés lors des simulations stationnaires. A gauche, le modèle avec pressions imposées aux sorties. A droite, la même géométrie munie de tubes évasés aux extrémités. En régime stationnaire des conditions de flux seront imposées à la base de ces évasements. En régime instationnaire, ils joueront le rôle de pistons, qui créeront le mouvement de l'air par des oscillations périodiques imposées.

être effectuée. La compréhension de l'influence de ces paramètres est indispensable car elle permet de donner un sens à certaines propriétés du poumon qui sans cela resteraient des observations.

3.2.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont extrêmement non linéaires, l'influence de cette non-linéarité dépend d'une grandeur adimensionnelle appelée nombre de Reynolds défini par :

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

où ρ représente la densité du fluide, μ sa viscosité, v sa vitesse caractéristique et d la taille caractéristique du domaine dans lequel le fluide circule. Ce nombre apparaît quand on écrit la version adimensionnelle des équations de Navier-Stokes. Le comportement des équations est lié à ce nombre et on l'utilise pour décrire leur comportement. Ainsi quand le nombre de Reynolds est grand, cas dans lequel il n'y a pas forcément unicité de la solution (pour l'équation stationnaire), le fluide entre dans le régime dit de *turbulence*. Pour des nombres de Reynolds pas trop grands, le fluide est dit *laminaire*. Dans le poumon (et dans les modèles considérés), il est difficile de définir réellement la dimension caractéristique d de la géométrie, car la taille des tubes et a priori la vitesse décroissent avec la génération (voir 4.1.2) mais il est possible de définir un nombre de Reynolds par branche. On peut considérer que la valeur de ce nombre en entrée est représentative pour comparer différents calculs et c'est ce nombre qui sera utilisé ci-dessous.

L'ordre de grandeur des nombres de Reynolds considérés ici est de 1000, cela correspond à un léger exercice, ne faisant pas intervenir a priori la turbulence (ce qui est vérifié en pratique, sachant que ce nombre décroît vite dans ce type de géométrie, et ce dès la première bifurcation grâce à la diminution de la taille caractéristique et de la vitesse).

Les phénomènes d'inertie proviennent du terme non-linéaire $u \cdot \nabla u$ présent dans l'équation de Navier-Stokes que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla P = f \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où u et p représentent respectivement la vitesse et la pression. f est la résultante des forces externes agissant sur le fluide, par exemple la gravité. Le fluide considéré est de l'air avec une viscosité égale à $\mu = 1.785 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$, une densité $\rho = 1.18 \text{ kg m}^{-3}$ et il est considéré incompressible. Dans cette section, on cherche à obtenir une solution avec $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (régime stationnaire). Le schéma numérique utilisé (voir [51]) résout Navier-Stokes instationnaire avec des conditions de bords fixes en temps. Le temps sert alors de variable de relaxation et le schéma est censé converger vers une solution indépendante du temps (le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ devient nul).

Nous avons résolu numériquement ces équations grâce au logiciel *N3S*, ce code utilise la méthode d'éléments finis de Chorin-Temam, aussi appelée méthode de projection, basée sur une remontée de caractéristiques pour traiter les termes en temps et sur un premier calcul qui donne une solution à divergence non nulle. Celle-ci est ensuite corrigée par une dernière étape dite étape de pression/continuité qui projète la précédente solution sur un espace à divergence nulle. Les vitesses sont approchées en éléments P^2 tandis que les pressions le sont en éléments P^1 . Pour des précisions sur cette méthode, voir la référence [51].

3.2.2 Inspiration stationnaire : conditions en pression

Dans cette partie, les simulations sont effectuées dans le modèle de la figure 3.3. Pour rappel, cette géométrie, de dimensions comparables à celles des poumons (voir l'annexe A pour plus de détails), est un arbre dichotomique de trois générations qui branche de façon symétrique et possède un axe de symétrie correspondant à l'axe de la trachée, voir chapitre 3.1. Ces propriétés permettent de mettre en évidence deux types de branches à la troisième génération : les branches latérales (branches D et G figure 3.3) et les branches inférieures (E et F). Géométriquement, les axes des branches inférieures ont une orientation plus proche de la trachée que les branches latérales. Cette remarque est importante quand on sait que "phénomène d'inertie" est synonyme dans notre cas de : "la direction préférentielle du fluide est celle qu'il a déjà".

Il s'agit de comprendre comment de l'air circulant dans ce type de structures va se répartir entre les différentes sorties. La géométrie possède des propriétés de symétrie que

le fluide ne va a priori pas conserver à cause de son inertie. A travers des simulations numériques dans des géométries dont certains paramètres ont été modifiés, nous avons cherché à minimiser l'influence de ces effets inertiels. Trois paramètres ont été étudiés : l'angle entre les deux plans de branchement successifs (entre les plans (ABC) et (BDE) de la figure 3.3), le rapport longueur sur diamètre des branches (qui est identique pour toutes les branches) et le nombre de Reynolds. Ces trois grandeurs sont clairement définies dans le poumon humain, principalement à partir des troisièmes ou quatrièmes générations (le poumon "utilise" les premières générations pour éviter le coeur, elles sont donc différentes des suivantes) : deux plans de branchement successifs forment un angle toujours proche de 90° tandis que le rapport longueur sur diamètre vaut toujours à peu près trois. Le nombre de Reynolds permet de choisir, en première approximation, quelles générations modélise l'arbre. Ainsi un nombre de Reynolds de l'ordre de 1000 correspond aux trois premières générations du poumon, en régime de léger exercice. Un nombre de Reynolds de 600 correspond aux générations deux à quatre pour le même régime respiratoire (voir chapitre 3.2.2, sous-partie *Influence du nombre de Reynolds* pour une évaluation de la décroissance du nombre de Reynolds au cours des générations) et ainsi de suite. Il y a, bien sûr, un problème de conditions d'entrée inconnues quand on considère des générations en-dessous de la trachée, surtout compte-tenu des effets d'inertie, mais les résultats obtenus restent néanmoins significatifs car ils définissent une tendance générale.

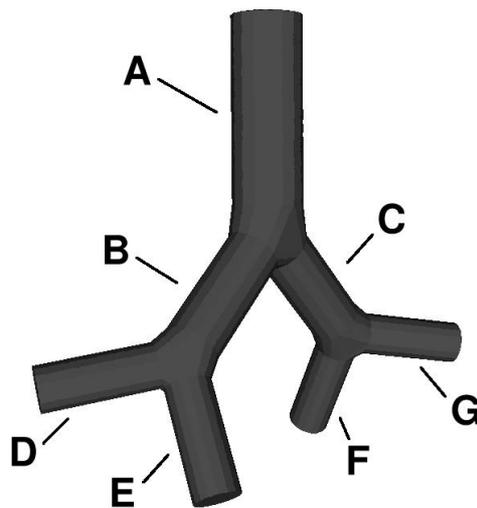


FIG. 3.3 – Exemple du type de géométrie utilisées lors des simulations. L'image montrée ici correspond à $L/D = 3$ et $\alpha = 45^\circ$. On observe deux types de branches de troisième génération : les branches latérales (D et G) et les branches inférieures (E et F). L'orientation des axes de ces dernières étant plus proche de la branche d'entrée A, elles sont favorisées en terme de flux.

Les conditions aux limites imposées suivent les symétries de la géométrie, ainsi les quatre sorties sont supposées être à des pressions identiques, des conditions de Neumann ont donc été imposées (pression nulle et $\partial u / \partial n = 0$). Ces conditions simulent des muscles qui dépenseraient exactement la même énergie à chacune des sorties pour pomper l'air dans les poumons. De telles conditions sont cohérentes avec la géométrie qui est censée remplir quatre volumes identiques. En entrée est imposé un flux entrant parabolique

(profil de Poiseuille) qui s'écrit dans un référentiel adapté à la section et en notant R le rayon de l'entrée :

$$v(x, y) = v_{max} \times \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{R^2}$$

A noter que l'on veut fixer le nombre de Reynolds, et que cela définit directement v_{max} par la formule $Re = \frac{\rho(2R)}{\mu} \frac{v_{max}}{2}$ (on considère que la vitesse caractéristique est la vitesse moyenne du fluide, c'est à dire $v_{max}/2$). Pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 1200, la vitesse moyenne correspondante est $v_{moy} = 1 \text{ m.s}^{-1}$ [63]. Sur les parois sont imposées des vitesses nulles, qui tiennent compte du fait que, dans les poumons, le glissement est minimisé par la structure annelée de la surface des bronches. Une fois ces conditions imposées, il s'agit de mesurer l'écart des flux entre les deux types de sortie (seule la différenciation latérale et inférieure est importante car le flux sera le même dans deux branches de même type, par symétrie). Pour mesurer cet écart, on définit un nombre appelé l'asymétrie des flux :

$$\Sigma(\alpha, L/D, Re) = \left| \frac{\Phi_D - \Phi_E}{\Phi_D + \Phi_E} \right|$$

Les variables Φ_D et Φ_E correspondent aux flux respectifs des branches latérales et inférieures, α est l'angle entre les plans de branchement de la géométrie, L/D le rapport longueur sur diamètre des bronches et Re le nombre de Reynolds. A noter que l'angle de référence $\alpha = 0^\circ$ correspond à un arbre plan (plus exactement dont les axes des branches se situent toutes dans un même plan).

Nous avons effectué des simulations à Reynolds fixé à 1200 pour tous les couples $(\alpha, L/D)$ avec α dans $\{0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$ et L/D dans $\{2.5, 3, 3.5, 4\}$. Les vitesses de l'air à l'entrée des poumons sont de l'ordre de 1 m.s^{-1} au repos (dans ce cas $Re \approx 1000$) et peuvent atteindre 10 m.s^{-1} en exercice intense ($Re \approx 10000$) [63]. Le cadre de nos simulations correspond donc à un régime proche du repos.

L'influence du nombre de Reynolds a été aussi étudié dans quelques géométries ($L/D = 3$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 75^\circ$). Comme il définit l'amplitude des effets d'inertie, ces simulations ont permis de déterminer à partir de quelle génération on peut négliger ces effets.

Résultats, généralités

Le flux est soumis à des contraintes inertielles importantes, visibles dès la deuxième génération. Dans la branche de première génération, le flux acquiert une direction préférentielle : l'axe de la trachée. En atteignant la bifurcation le flux va se coller sur la paroi des branches de deuxième génération, créant un profil caractéristique de vitesse appelé *M-shape* dans la littérature [69, 48]. La coupe en haut à droite de la figure 3.4 en est un exemple typique. Excepté pour un angle très particulier respectant l'axe de symétrie de la *M-shape* ($\alpha = 90^\circ$, voir ci-dessous), celle-ci brise la symétrie lors du branchement suivant. Ainsi, les branches de la troisième génération peuvent recevoir des flux très différents, cette différence dépendant de la position du plan de branchement par rapport à la *M-shape*. On peut aussi noter que ce profil particulier ne reste pas identique à lui-même le long de

la branche : elle a tendance à s'homogénéiser durant sa progression dans le tube, c'est pourquoi le paramètre L/D a une importance non négligeable dans la répartition des flux. Un exemple de flux dans les trois générations est présenté sur la figure 3.4 dans le cas $\alpha = 45^\circ$ et $L/D = 3$.

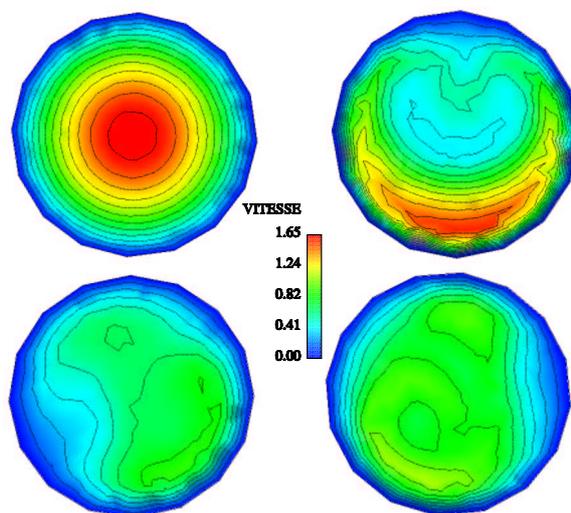


FIG. 3.4 – La coupe en haut à gauche correspond à la première génération, la coupe en haut à droite la deuxième génération tandis que les coupes du bas sont celles d'une branche inférieure à droite et d'une branches latérale à gauche. L'inertie déforme le flux dans les branches de la deuxième et de la troisième génération.

Dans la seconde génération, les phénomènes d'inertie sont caractérisés par l'écrasement du flux sur la paroi opposée à la trachée. Puis, en avançant le long de la branche, une partie du flux va se répartir le long de la paroi en tournant autour de l'axe du cylindre, c'est le *flux secondaire* (ou *secondary flow* en anglais). Ce flux secondaire est à l'origine de l'homogénéisation de la vitesse observée dans des branches assez longues (donc pour de grands rapports L/D , voir ci-dessous). La figure 3.5 schématise ces observations.

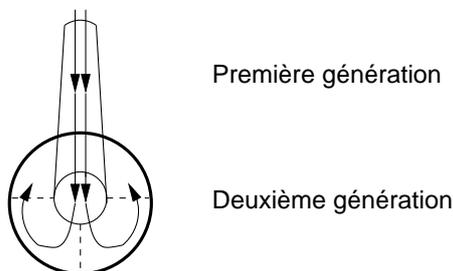


FIG. 3.5 – Origine de la *M-shape*. Le flux provenant de la première génération se retrouve majoritairement sur la partie inférieure de la branche de seconde génération, puis il entame un mouvement de rotation autour du cylindre tout en avançant le long de la branche.

La troisième génération est représentée par les coupes en bas de la figure 3.4. On voit que la branche inférieure (à droite) reçoit plus de flux que la branche latérale (à gauche). On voit aussi que le flux n'est pas réparti de façon homogène sur la section, cela implique que s'il y avait encore une bifurcation le flux ne se diviserait pas de façon symétrique sans une contrainte très précise sur la géométrie, qui ne serait d'ailleurs pas la même pour les branches latérales et inférieures.

Résultats, influence de l'angle α

Les résultats sont exposés sur la figure 3.6 qui présente Σ en fonction de α pour différentes valeurs de L/D . Deux points importants apparaissent : l'existence d'un minimum avec $\Sigma = 0$ et le comportement sensible autour de ce minimum. Le minimum étant 0, on voit qu'il existe une géométrie répartissant le flux de façon homogène, cette géométrie correspond à $\alpha = 90^\circ$ (une géométrie avec deux plans de symétrie), néanmoins une petite variation autour de cet angle idéal entraîne une augmentation très rapide de l'asymétrie. On peut observer que Σ est maximum pour un arbre plan, très loin de la réalité anatomique.

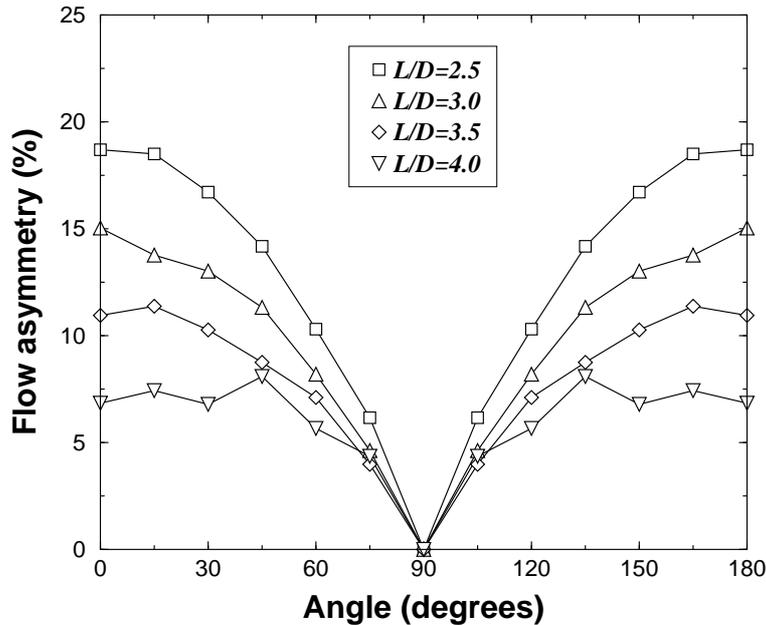


FIG. 3.6 – Dépendance de l'asymétrie Σ en fonction de l'angle entre les plans de branchement α . Le Reynolds est fixé à 1200. Les oscillations sont dues à des erreurs numériques. Les valeurs $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 180^\circ$ correspondent à un arbre plan. $\alpha = 90^\circ$ est la valeur moyenne observée dans les poumons des mammifères.

La sensibilité de l'asymétrie relativement à α est une conséquence de la façon dont les branches de la troisième génération capturent la *M-shape*. On peut en effet définir sur celle-ci deux zones de capture de flux correspondant chacune à une branche-fille. La position de ces zones dépend de l'angle α . Ainsi $\alpha = 90^\circ$ divise la *M-shape* en deux zones identiques (plan (ABC) sur la figure 3.7). Toutefois dès que l'angle change, on ajoute

d'un côté beaucoup de flux (zones rouge et jaune figure 3.7) tandis que de l'autre on en retire beaucoup. C'est la raison pour laquelle on observe un pic autour de $\alpha = 90^\circ$ sur la figure 3.6.

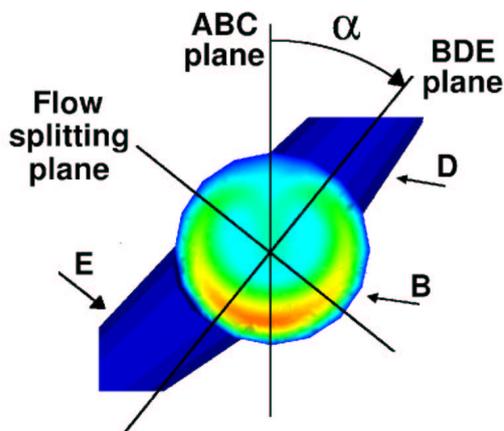


FIG. 3.7 – Coupe montrant le profil de vitesse *M-shape* pour $L/D = 3$ et $\alpha = 45^\circ$, cette coupe a été effectuée au milieu d'une branche de la seconde génération (branche B). Les couleurs indiquent l'amplitude des vitesses, l'ordre de couleurs bleu, vert et rouge correspond à un accroissement des vitesses. Les branches de troisième génération sont représentées en bleu, vers l'arrière. On observe une zone de faibles vitesses au centre de la coupe. Le plan de bifurcation (*BDE*) est à l'origine de l'asymétrie : la branche du bas (*E*) reçoit plus de flux que celle du haut (*D*).

La figure 3.8 est un exemple de ce phénomène de séparation des flux dans le cas où $L/D = 3$ et $\alpha = 45^\circ$. Sont représentées des coupes de la branche B (seconde génération). L'axe de la trachée est vertical. La première coupe correspond au flux à l'entrée de la branche, les vecteurs vitesses sont majoritairement orientés vers le bas de la figure : la *M-shape* est en cours de formation. On peut l'observer sur les deuxième et troisième coupes. La troisième coupe se situant en aval de la deuxième, on remarque une légère "dilution" des grandes vitesses de la base de la *M-shape* et un allongement des pointes vertes situées en haut à gauche et en haut à droite : le *flux secondaire* progresse en tournant le long de la paroi circulaire, voir figure 3.9. Si la branche était suffisamment longue, ce flux remplirait par le haut le centre de la *M-shape*, ici le siège de vitesses faibles. Les deux dernières coupes sont observées au niveau de la bifurcation, on voit nettement que la branche du bas va recevoir plus de flux que celle du haut et que ce phénomène est une conséquence de la *M-shape*.

Ainsi l'angle entre les plans de branchement joue un rôle fondamental dans la répartition des flux : seule une valeur, précisément égale à 90° , permet une répartition homogène du flux entre les quatre branches-filles. Malheureusement toute déviation entraîne un rapide déséquilibre entre les branches inférieures et latérales, les inférieures étant favorisées en terme de flux par les phénomènes d'inertie.

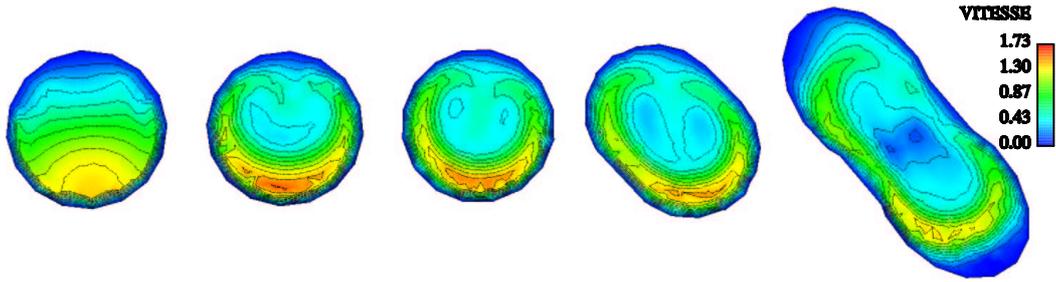


FIG. 3.8 – Evolution de la *M-shape* le long d’une branche de la deuxième génération. L’axe de la trachée est vertical. On voit que lors du branchement, la plus grande partie du flux va dans la branche du bas à cause des effets d’inertie.

Les angles entre plans de branchement dans les poumons sont proches de 90° mais il existe inévitablement chez les êtres vivants une certaine variabilité. Ainsi des écarts, même faibles, de ces angles vont entraîner, compte-tenu des résultats ci-dessus, une répartition inhomogène des flux. Ce processus se répètera sur plusieurs générations (tant que l’inertie joue un rôle, à peu près pendant cinq ou six générations, c’est à dire pendant une succession de quatre ou cinq plans de branchement, voir ci-dessous l’influence du nombre de Reynolds sur l’asymétrie) et à la limite, une répartition multifractale [46] des flux apparaîtrait aux sorties. Plus précisément, un modèle simple de ce phénomène peut être construit si on considère qu’à chaque branchement une fraction p du flux va dans une branche-fille et $(1 - p)$ dans l’autre. Une répartition identique des flux pour toutes les générations est raisonnable compte-tenu du fait que l’asymétrie est quasiment la même jusqu’à un nombre de Reynolds critique de l’ordre de 250, voir ci-dessous, en particulier la figure 3.10. Si on considère un arbre de six générations, les flux en sortie s’écrivent, en notant Φ le flux en entrée :

$$p^n \times (1 - p)^m \times \Phi$$

avec $(n, m) \in \mathbb{N}$ tels que $n + m = 5$. Ainsi pour une asymétrie de 10%, $p = 0.45$ et $(1 - p) = 0.55$. La branche la plus défavorisée reçoit un flux de $0.45^5 \times \Phi \sim 0.018 \times \Phi$ tandis que la branche la plus favorisée reçoit $0.55^5 \times \Phi \sim 0.050 \times \Phi$. Un rapport de 2.8 existe donc entre les deux branches, ce qui crée des inhomogénéités incompatibles avec notre hypothèse initiale de quatre volumes identiques. Dans un arbre dissymétrique, le même phénomène serait observé avec toutefois une différence : l’unique géométrie adaptée à la répartition des flux vers des volumes inégaux serait obtenue avec un angle différent de $\alpha = 90^\circ$.

Ainsi seule une géométrie précisément construite peut distribuer convenablement les flux. Or le poumon est une structure dont la géométrie change au cours du temps, ne serait-ce que par la mécanique de la respiration. C’est pourquoi le flux doit forcément y être régulé. Cette régulation pourrait être musculaire, au niveau des petites bronches (par le muscle lisse) ou encore imposée par les amplitudes locales du gonflement de l’arbre bronchique lors de l’inspiration (conditions aux limites de flux, auquel cas on a une instabilité en pressions, voir chapitre 3.2.3). Dans tous les cas cela implique une prise en compte de ces phénomènes d’inertie par le poumon.

Résultats, influence du rapport longueur sur diamètre L/D

Le rapport longueur sur diamètre des branches joue un rôle important car il correspond à la capacité que peut avoir l'arbre d'homogénéiser les phénomènes d'inertie. En effet, si les branches étaient suffisamment longues, la *M-shape* se transformerait progressivement en un profil parabolique (profil de Poiseuille) et l'asymétrie de répartition des flux à la troisième génération disparaîtrait. Toutefois seules de très longues branches le permettraient et le rapport L/D des poumons, qui est de l'ordre de 3, ne permet qu'une homogénéisation partielle comme le montre la figure 3.6 où les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de L/D (2.5, 3, 3.5 et 4). On voit clairement qu'allonger ce rapport diminue sensiblement l'asymétrie mais que le facteur 3 (et même 4) ne suffit pas. Dans tous les cas, l'asymétrie reste très sensible aux variations autour de 90° . Malgré la nécessité d'une régulation des flux, des branches trop courtes dans le poumon entraîneraient des effets d'inertie bien trop importants et difficilement gérables (surtout en régime d'exercice). D'un autre côté des bronches trop longues auraient des volumes et des résistances trop importantes. Ces remarques qualitatives suggèrent l'existence d'un compromis où L/D de l'ordre de 3 a été sélectionné.

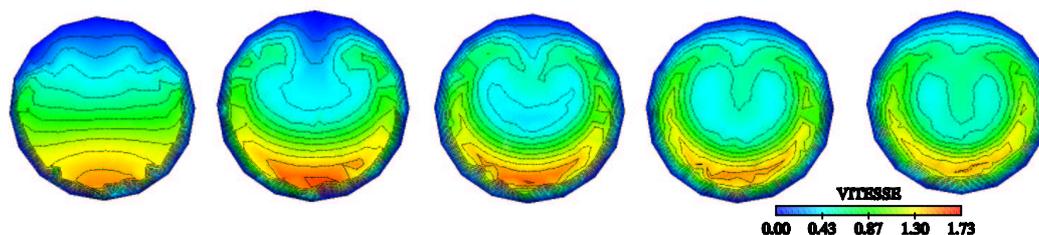


FIG. 3.9 – Evolution de la *M-shape* le long d'une branche de la deuxième génération dans le cas où le rapport longueur sur diamètre vaut 4. L'axe de la trachée est vertical. De gauche à droite les coupes vont d'aval en amont de la branche, elles sont espacées de 8 mm. La première coupe ne montre pas encore la *M-shape* mais on voit qu'elle est en cours de formation, les vecteurs vitesses sont dirigés vers le bas et le flux va se "tasser". La *M-shape* est présente sur les autres coupes, elle se déforme progressivement quand on suit la branche. Elle a tendance à s'homogénéiser, les grandes vitesses à la base diminuant au fur et à mesure que le flux secondaire envahit le centre par les côtés, en haut (pics verts). L'asymétrie est moins marquée dans ce cas car les tubes sont assez longs pour permettre au flux de mieux se répartir dans le volume.

La figure 3.9 montre le phénomène d'homogénéisation des effets d'inertie dans la seconde génération (branche B) dans le cas $\alpha = 45^\circ$ et $L/D = 4$. En particulier, le centre de la coupe, d'abord zone de faibles vitesses, se remplit progressivement grâce au flux secondaire qui tourne autour de la paroi en avançant. Le centre se "remplit" progressivement de flux par le haut. Si les branches étaient suffisamment longues, on obtiendrait un profil parabolique.

Résultats, influence du nombre de Reynolds

La figure 3.10 montre la dépendance de l'asymétrie dans deux géométries avec $L/D = 3$ et pour α valant 60° (cercles) et 75° (carrés). La dépendance au nombre de Reynolds est surtout importante pour les petites valeurs (≤ 250). Ensuite un plateau est atteint et les variations deviennent relativement faibles. Ce plateau dénote une certaine saturation du phénomène d'asymétrie due en particulier au flux secondaire qui se déplace plus rapidement pour les grands Reynolds et remplit le centre de la *M-shape* [16]. Ce genre de comportement a déjà été observé dans des géométries à deux dimensions [69, 2]. Le nombre de Reynolds seuil qui sépare ces deux comportements est quasiment indépendant de l'angle (c'est raisonnable compte-tenu du fait que l'asymétrie provient de la *M-shape* qui est toujours la même à Reynolds et L/D fixés).

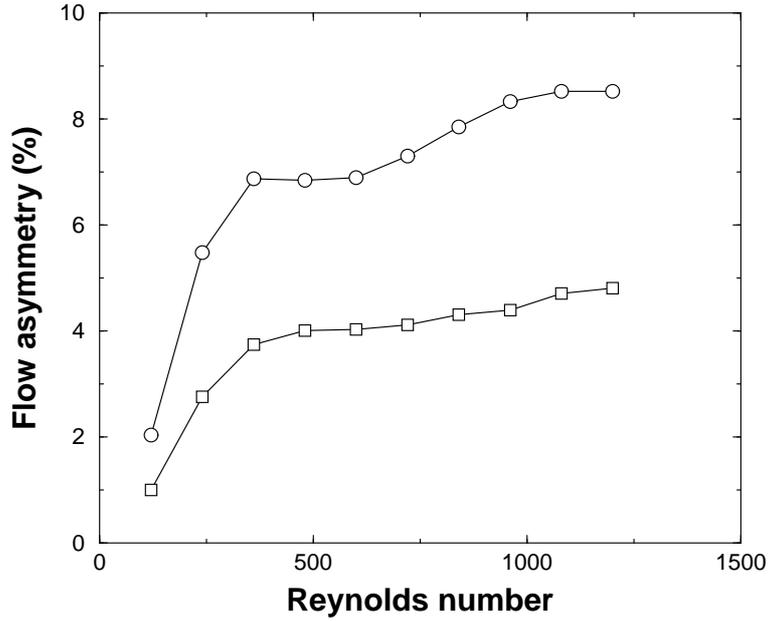


FIG. 3.10 – Dépendance de l'asymétrie Σ en fonction du nombre de Reynolds Re dans le cas $L/D = 3$. Les cercles correspondent à $\alpha = 60^\circ$ et les carrés à $\alpha = 75^\circ$.

La figure 3.11 montre des coupes de la branche B (seconde génération) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Pour les grandes valeurs, la *M-shape* est très marquée. Quand il diminue, on voit que les lignes de niveau des vitesses tendent à devenir des cercles concentriques : la *M-shape* se réduit à un profil de Poiseuille. Pour un nombre de Reynolds de 120, l'asymétrie est inférieure à 2% et donc elle devient négligeable. On peut estimer la génération à partir de laquelle l'inertie n'a plus d'influence (asymétrie inférieure à 2%). Par conservation du flux (voir chapitre 4.1.2), en notant v_n la vitesse moyenne à la génération n et S_n la surface totale des sections de la génération n , on a $v_n \times S_n = v_{n+1} \times S_{n+1}$. En considérant que le diamètre D_{n+1} des branches de la génération $n + 1$ est une réduction de h du diamètre D_n des branches de la génération n , on obtient $v_n \times 2^n \times D_n^2 = v_{n+1} \times 2^{n+1} \times D_{n+1}^2 = (2v_{n+1}h^2) \times 2^n \times D_n^2$. Finalement :

$$v_n = 2 \times v_{n+1} \times h^2$$

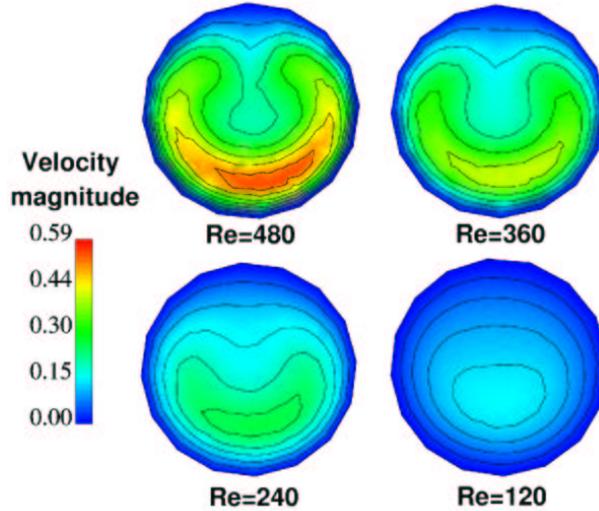


FIG. 3.11 – Profil des vitesses (amplitude) dans une section de la deuxième génération pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (cas d’une géométrie avec $L/D = 3$ et $\alpha = 60^\circ$). Quand le nombre de Reynolds augmente, le profil prend progressivement la forme de la *M-shape*.

Ainsi $v_n \times D_n = 2 \times v_{n+1} \times h \times D_{n+1}$, donc on obtient pour les nombres de Reynolds, Re_n étant le Reynolds à la n -ième génération, l’égalité $Re_n = 2h \times Re_{n+1}$ et finalement :

$$Re_n = \left(\frac{1}{2h}\right)^n Re_0$$

On cherche la génération n à partir de laquelle $Re_n \leq Re_s$, ceci équivaut à

$$n \geq \frac{\ln(Re_0/Re_s)}{\ln(2h)}$$

On peut considérer que $h \sim (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$, $Re_s = 120$ et $Re_0 = 1200$. Ainsi on obtient la génération seuil à partir de laquelle on peut négliger les effets d’inertie : $n \geq 4.98$. Etant donné que la première génération est numérotée 0, c’est à partir de la sixième génération que les effets d’inertie sont négligeables, avec une asymétrie inférieure à 2%.

3.2.3 Inspiration stationnaire : conditions en flux

Dans le poumon, le mouvement est créé par des forces musculaires pendant l’inspiration, et élastiques pendant l’expiration. Il est toutefois difficile de déterminer si ces forces imposent aux extrémités de l’arbre une pression ou un flux (ou une condition mixte, ce qui est a priori le plus probable car il existe des interactions fluide-structure que nous négligerons par soucis de simplicité). Néanmoins, il existe une certaine dualité entre les conditions de pression et de flux. Dans le paragraphe précédent, les pressions imposées aux sorties ont entraîné une dissymétrie des flux. Les simulations suivantes montrent qu’imposer des flux aux sorties mène à une dissymétrie en pression du même ordre et dont la sensibilité à la géométrie reste importante. Les modèles géométriques utilisés sont les mêmes que pour les simulations à flux imposés, excepté que des structures évasées

ont été ajoutées à chacune des branches de la troisième génération, voir figure 3.12. Cela permet d'appliquer des conditions de flux sans imposer les profils de vitesse directement aux extrémités et de considérer que la demande en flux provient d'une région plus large (comme c'est le cas dans les poumons où le pompage vient de toutes les directions à la fois, compte-tenu de l'homogénéité de répartition des acinus).

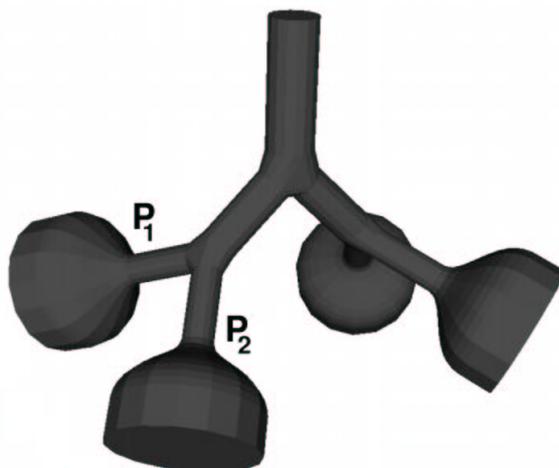


FIG. 3.12 – Dans ce modèle, les flux sont imposés à la base des zones évasées ajoutées aux quatre sorties.

Cette fois-ci on mesure la dissymétrie en pression par le nombre :

$$\Sigma(\alpha) = \left| \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right|$$

où P_1 est la pression moyenne sur la section à l'extrémité d'une des branches latérales (juste avant la structure évasée) et P_2 la pression moyenne sur la section à l'extrémité d'une des branches inférieures (voir figure 3.12).

Les résultats sont présentés sur la courbe de la figure 3.13, on voit que l'angle $\alpha = 90^\circ$ correspond à nouveau à des pressions identiques et qu'une légère variation autour de 90° entraîne une augmentation très sensible de l'asymétrie en pression. Une différence significative avec les conditions aux bords de flux apparaît pour les angles très éloignés de 90° , mais cela ne correspond pas aux angles existant dans les poumons qui sont proches de 90° . Ainsi les deux approches, conditions aux bords de pression ou de flux, ont des conséquences identiques sur la sensibilité du système (voir chapitre 3.2.2). A noter que ce résultat n'est pas surprenant, en effet, les deux approches sont rigoureusement les mêmes quand on considère un régime de Poiseuille, ainsi, on voit le fait de rajouter de l'inertie ne brise cette correspondance que dans les cas où ses effets sont amplifiés par la géométrie (par exemple pour $\alpha = 0^\circ$).

Toutefois le phénomène mécanique est un peu différent dans ce cas, le profil habituel de vitesses dans la seconde génération, la *M-shape*, existe toujours et favorise a priori

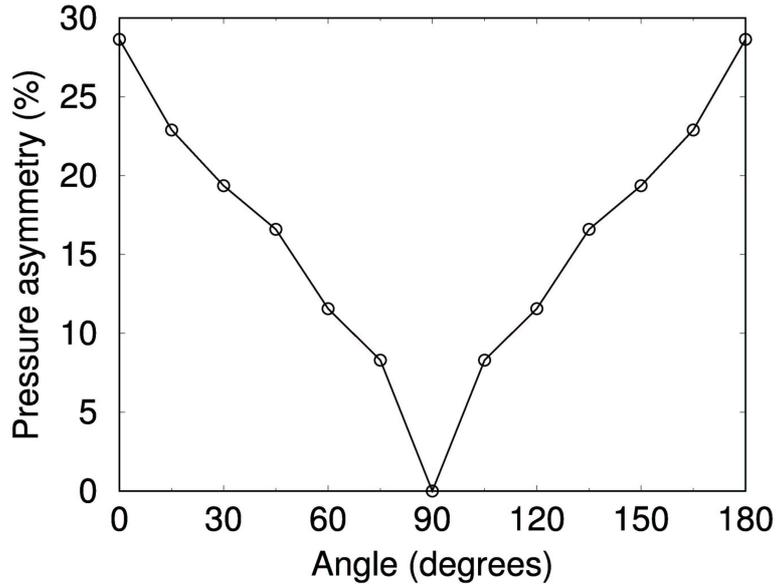


FIG. 3.13 – Asymétrie en pression quand des flux identiques sont imposés aux quatre sorties. On mesure l’asymétrie en pression par le nombre $\Sigma = |(P_1 - P_2)/(P_1 + P_2)|$. La courbe représentant Σ en fonction de l’angle α montre qu’une petite variation autour de $\alpha = 90^\circ$ a des effets importants sur l’asymétrie en pression.

le flux dans les branches inférieures. Or les flux étant imposés identiques entre les deux types de branches, la mécanique des fluides doit compenser grâce à des chutes de pressions différentes dans les deux types de branches, la *M-shape* va alors se déformer pour distribuer les flux. Une remarque intéressante est que cette déformation a lieu très tard dans les branches de la deuxième génération, c’est à dire très proche de la bifurcation deuxième vers troisième génération.

3.2.4 Trajectoires de particules

Connaître les trajectoires de particules dans des arbres est une question très importante en médecine. En effet de nombreux problèmes sont liés à ces trajectoires : prédire les dépositions de poussières peut permettre de mieux comprendre pourquoi certains sites sont des zones préférentielles pour le développement des cancers, comprendre leurs trajectoire peut par exemple permettre d’améliorer l’efficacité de sprays à vocation thérapeutique (comme les bronchodilatateurs contre l’asthme).

Si les particules sont suffisamment petites et peu nombreuses, elles influent très peu sur le champs des vitesses et il est raisonnable de découpler le mouvement de l’air et des particules. Ainsi, une fois le champs de vitesses calculé, leurs trajectoires sont la conséquence de leur transport par le fluide. L’équation du mouvement s’écrit alors :

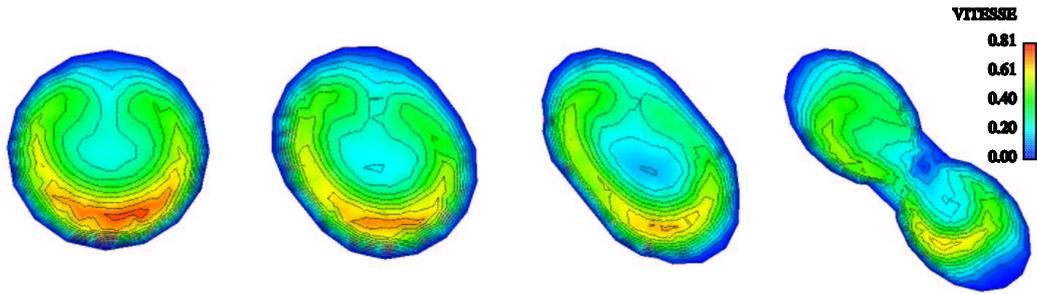


FIG. 3.14 – En imposant les mêmes flux aux deux sorties, la mécanique des fluides doit déformer le profil de vitesse (*M-shape*) qui favorise a priori les branches inférieures. Ainsi pour compenser les effets d’inertie elle doit créer une dépression plus grande dans les branches latérales que dans les branches inférieures, cette dépression déforme la *M-shape* de façon à adapter les flux. A noter que cette déformation est réalisée dans une zone très restreinte des branches de la seconde génération, zone très proche de la bifurcation. De gauche à droite, chaque image est décalée de 4 mm de la précédente. L’axe de la trachée est la direction verticale. La dernière image correspond à une coupe juste avant la bifurcation, on voit les deux branches filles inclinées de 45°.

$$\begin{cases} \frac{du_p}{dt} = F_p \\ u_p(0) = 0 \end{cases}$$

où u_p est la vitesse de la particule, F_p est la force de Stokes :

$$F_p = \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} \frac{C_D Re}{24} (u_p - u)$$

$$Re = \frac{\rho D_p |u_p - u|}{\mu}$$

Re correspond au nombre de Reynolds relatif de la particule dans le fluide. Les constantes de ces formules sont ρ et ρ_p les densités respectives du fluide et de la particule, D_p le diamètre de la particule, u la vitesse locale du fluide et μ sa viscosité. C_D est une constante empirique dépendant de la valeur du nombre de Reynolds relatif de la particule. Cette force est induite par le mouvement de la particule dans le fluide : une dépression est créée à l’arrière de la particule tandis qu’une surpression y est créée à l’avant. Ainsi la particule est aspirée vers l’arrière, cela ralentit son mouvement, voir figure 3.15.

La résolution a été effectuée par une méthode de Runge-Kutta d’ordre 4 à pas de temps variable, programmée en C++. Le bord de la géométrie est supposé être collant et une particule touchant sa surface est piégée. Elles sont lâchées à vitesse nulle à l’entrée de la trachée et sont soumises au flux calculé dans les sections précédentes. Il faut noter que

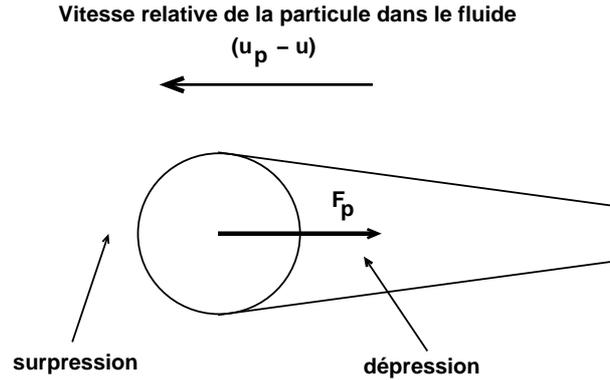


FIG. 3.15 – La force de Stokes F_p est une aspiration en arrière de la particule, due à son mouvement dans le fluide qui crée une dépression (trainée) à l’arrière de la particule et une surpression à l’avant.

la gravité a été négligée car nous avons considéré des particules plutôt légères (particules d’eau dont la taille est de l’ordre du μm). Un exemple de trajectoires est présenté sur la figure 3.16. On voit en particulier les effets de l’inertie, certaines particules ayant des chemins qui tournoie le long des parois dans la seconde génération. A noter que certains endroits, comme le creux de faibles vitesses au milieu de la *M-shape*, sont des pièges à particules. Toutefois, quand elles sont assez légères, très peu sont piégées par la paroi ou dans les zones de faibles vitesses car elles suivent les lignes de courant du flux. Les sorties latérales et inférieures ne sont pas identiques en terme de provenance des particules. Ainsi, la branche par laquelle la particule va sortir dépend de sa position initiale à l’entrée. On peut donc dresser une carte des positions initiales selon la branche de sortie. Il apparaît des patterns qui dépendent de la géométrie. Une étude plus systématique de ces patterns pourrait permettre de développer une méthode permettant la détermination des caractéristiques géométriques d’un arbre inconnu grâce à un lancer de particules dans la structure. Un exemple de carte de répartition est représenté sur la figure 3.17.

3.2.5 Quelques remarques sur le régime expiratoire

Les calculs précédents ont tous été effectués en régime inspiratoire. Compte-tenu de la configuration arborescente des géométries, pendant l’inspiration les flux à grandes vitesses entrent en collision avec les bifurcations, ce qui crée des profils de vitesses déformés (*M-shape*). Pendant l’expiration c’est le phénomène inverse qui se produit : des flux à petites vitesses se rejoignent aux bifurcations et s’ajoutent. Les effets d’inertie vont donc être très différents selon le moment considéré du cycle respiratoire. C’est pourquoi une investigation de l’expiration est importante. Dans ces calculs, un flux entrant a été imposé aux quatre sorties d’une géométrie identique à celle de la figure 3.12. Les résultats montrent que l’asymétrie en pression existant durant l’inspiration est absente en expiration : *à l’expiration les propriétés des flux et pressions dans les quatre sorties sont sensiblement identiques*. Les effets d’inertie sont aussi moins marqués (les grandes vitesses sont réparties sur des surfaces plus grandes) et respectent la symétrie de la géométrie.

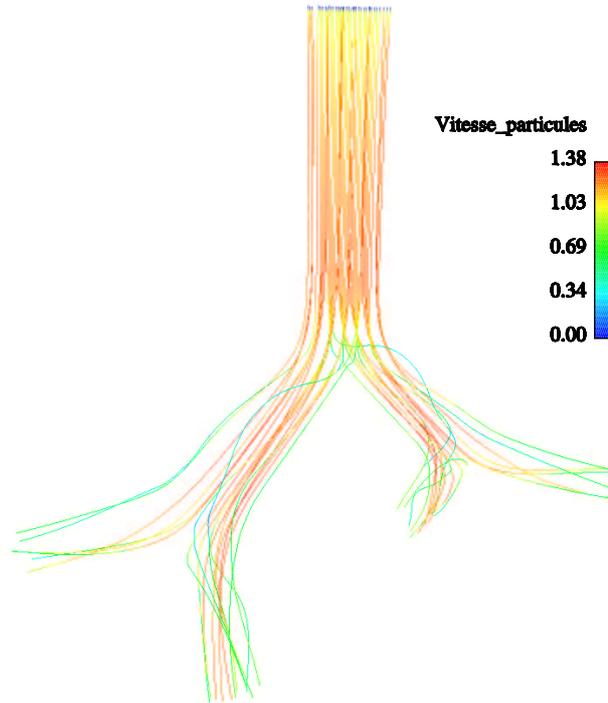


FIG. 3.16 – Exemple de lâchers de particules d'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$) de $7 \mu\text{m}$ de diamètre dans une géométrie traversée par un flux stationnaire dont le Reynolds vaut 1200. La couleur correspond aux vitesses des particules. On observe que certaines particules (en vert, deuxième génération) suivent les parois en tournant, conséquences des effets d'inertie.

La figure 3.18 montre les différents profils de vitesse dans les différentes générations (géométrie avec $L/D = 3$ et $\alpha = 45^\circ$). En haut à gauche, le flux dans la première génération est déformé en deux pics orientés vers les branches de la seconde génération (direction d'où provient majoritairement le flux). En haut à droite, une coupe de la deuxième génération montre le même effet, sachant qu'elle branche verticalement (l'axe des branches filles est vertical). L'inertie se ressent principalement au centre du tube avec un profil de grandes vitesses perpendiculaire au plan de branchement. Enfin en bas de la figure 3.18 sont représentées les coupes des branches de troisième génération. Elles sont identiques, avec des vitesses au centre formant un plateau. Ces coupes sont à comparer avec le régime inspiratoire étudié dans le chapitre précédent 3.2.3 et plus particulièrement avec la figure 3.4.

Ces résultats préliminaires laissent supposer une différence importante de fonctionnement entre l'inspiration et l'expiration, les simulations instationnaires des paragraphes suivants vont préciser ce résultats et valider les conclusions de ce chapitre.



FIG. 3.17 – Section de l’entrée de la trachée. Chaque pixel correspond à une particule lâchée depuis cette position, chaque couleur majeure correspond à une branche de sortie (rouge et bleu foncé correspondent aux branches latérales tandis que jaune et bleu clair correspondent aux branches inférieures). Dans ce cas 1765 trajectoires ont été calculées. On voit apparaître un pattern qui dépend de la géométrie et qui correspond aux différents “bassins d’attraction” des branches de sortie. On peut très facilement déterminer l’angle de rotation entre les plans de branchement (ici 45°). Cette propriété pourrait être approfondie dans le but de caractériser des géométries arborescentes inconnues par des lâchers de particules.

3.3 Régime instationnaire

Les résultats obtenus jusqu’ici sont issus de modèles stationnaires. Des simulations où le temps intervient permettront de valider nos précédents résultats dans un cadre plus réaliste et de préciser ce qui a déjà été observé. Toutefois un modèle instationnaire doit forcément être associé à un modèle de respiration. Dans les poumons la respiration est quasi cyclique (chacune des respirations “ressemble” à la précédente mais est un peu différente en durée, intensité, etc., c’est pourquoi on cherche à appliquer des théories du chaos à ce système). La période respiratoire est de l’ordre de cinq secondes, mais inspiration et expiration ne sont pas des phénomènes de durée identique : l’inspiration dure à peu près deux secondes et l’expiration trois secondes. De plus les phénomènes mécaniques à l’origine des mouvements sont complètement différents pendant ces deux phases, ainsi modéliser de façon réaliste la respiration est très complexe. Nous avons donc décidé de découpler ces deux problèmes et de nous focaliser sur l’influence de la géométrie dans un cadre respiratoire sinusoïdal, sans pour autant “oublier” cette complexité respiratoire et ses possibles conséquences. Nous avons considéré des modèles à branchements symétriques de deux ou trois générations identiques à ceux utilisés en régime stationnaire. Le principal résultat de cette section est que l’inspiration et l’expiration sont des phénomènes très différents du point de vue des effets d’inertie. Il est aussi intéressant de constater que ces phénomènes inertiels n’ont de conséquences que pendant une durée assez brève du cycle.

Pour rapprocher nos simulations du problème réel, un flux instationnaire a été simulé dans un modèle réaliste de poumon (modèle de H. Kitaoka, voir figure 3.26) avec un modèle de respiration plus précis, voir le chapitre 3.3.3. Cette simulation a permis, en particulier de comparer les résultats obtenus sur des modèles théorisés avec des flux plus réalistes. Ce travail a aussi un rôle d’introduction à une collaboration future qui permettra de simuler le flux dans des reconstructions de poumons effectuées par scanners en milieu hospitalier (dans des cas normaux ou pathologiques).

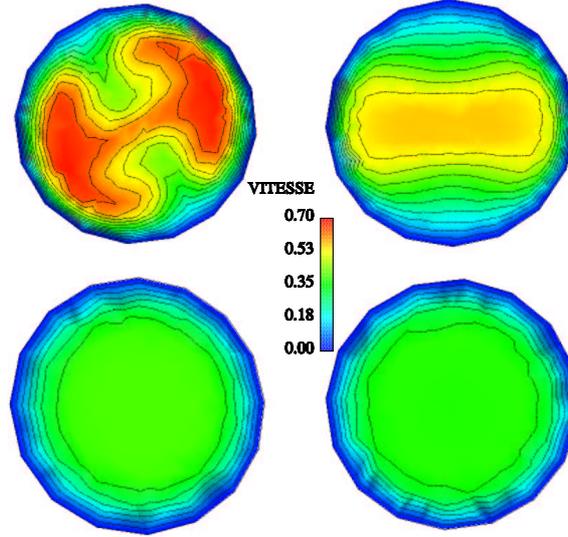


FIG. 3.18 – La coupe du haut à gauche correspond à la première génération, la coupe du haut à droite la deuxième génération tandis que les coupes du bas sont celles d’une branche inférieure (à droite) et d’une branches latérale (à gauche). Les effets d’inertie expiratoires sont très différents des effets d’inertie inspiratoires, voir figure 3.14.

3.3.1 Techniques de simulation

Le logiciel N3S est conçu pour gérer les géométries variables en temps grâce à un modèle ALE, pour plus d’informations voir [52]. Les déformations du maillage doivent être imposées en plus des conditions aux bords. Etant donné que les conditions de paroi sont des conditions de non-glissement, la vitesse du fluide sur les parties mobiles est identique à la vitesse de déplacement du maillage. Dans un régime respiratoire sinusoïdal la position des points de la base des pistons est donnée par :

$$M(t) = M_0 + a \frac{(1 + \sin(\omega t))}{2} \times \vec{n}$$

où M_0 est la position du point au temps $t = 0$, \vec{n} est le vecteur unitaire de l’axe du piston, a est l’amplitude du piston. Dans ce cas on imposera au fluide la condition :

$$v_p(t) = a\omega \frac{\cos(\omega t)}{2} \vec{n}$$

En général, on cherche à imposer un nombre de Reynolds maximum. Par exemple, si on travaille dans une géométrie à quatre pistons, comme l’arbre de droite de la figure 3.19, le flux total à l’entrée est $\phi_e(t) = 4v_p(t)S_p$. v_p est la vitesse des pistons et $S_p = \pi D_p^2/4$ est la surface de la base d’un piston, plus précisément c’est un disque de diamètre $D_p = 6 \text{ cm}$. La vitesse moyenne en entrée est donc $v_e(t) = \phi_e(t)/S_e$ où $S_e = \pi D_e^2/4$ est la surface de l’entrée, qui est un disque de diamètre de $D_e = 2 \text{ cm}$. On obtient donc un nombre de Reynolds (défini à l’entrée) dépendant du temps :

$$Re(t) = \frac{\rho v_e(t) D_e}{\mu} = \frac{\rho v_p(t) D_p^2}{\mu D_e}$$

Etant donné que la valeur maximum de v_p est $\frac{a\omega}{2}$, le nombre de Reynolds maximum est donc

$$Re_{max} = \frac{\rho a \omega D_p^2}{2\mu D_e}$$

Cette formule permet de définir l'amplitude des pistons selon le nombre de Reynolds que l'on souhaite en entrée. C'est le moyen employé pour toutes les simulations dans des arbres symétriques à deux ou trois générations. Les conditions d'entrée sont des conditions de Neumann : la pression est fixée à 0 et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. C'est une condition de sortie libre.

3.3.2 Modèles à branchements symétriques

Les précédentes simulations dans des géométries symétriques ont été effectuées en régime stationnaire. Les calculs de cette section vont valider les observations déjà faites et préciser certains résultats. En particulier l'évolution des phénomènes d'asymétrie durant le cycle respiratoire devient accessible. Nos observations vont ainsi confirmer la différence de fonctionnement qui existe entre inspiration et expiration. Plus précisément, nos études tendent à montrer que l'inspiration est un phénomène plus inhomogène que l'expiration en terme de répartition de la dépense énergétique. De plus, ces résultats permettent de proposer un modèle de mécanique de la respiration intégrant les forces musculaires ou élastiques intervenant sur les poumons.

Géométries & respiration

Pour faire "respirer" les modèles utilisés jusqu'ici, un pompage provenant du fond de la structure est simulé par l'ajout de pistons aux quatre extrémités. Dans les poumons, les générations inférieures pompent depuis toutes les directions, ainsi l'utilisation de pistons évasés est un bon compromis entre simplicité et réalisme, voir figure 3.19. Cela permet en outre de ne pas imposer directement les profils des vitesses aux sorties de l'arbre, ces profils étant a priori non triviaux et donc inconnus (voir le chapitre 3.2 sur les simulations en régime stationnaire).

Les amplitudes à imposer aux pistons sont obtenues par les formules données dans la partie précédente (3.3.1) avec deux ou quatre sorties selon le modèle. La respiration est donc simulée par un mouvement sinusoïdal de ces pistons au cours du temps. Ce choix de modèle de respiration, très simplifié, va mettre en évidence les différences entre inspiration et expiration dans un cadre où ces deux phénomènes sont créés de façon identique. Cette approche permettra en particulier de mieux comprendre les raisons de l'asymétrie temporelle entre ces deux phases de la respiration.

Résultats, arbres à deux générations

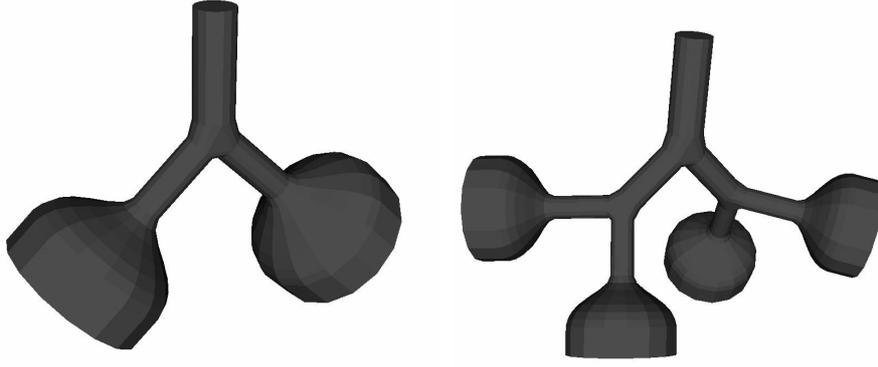


FIG. 3.19 – Exemples de géométries utilisées en régime instationnaire. Les conditions de déplacement du maillage sont imposées à la base des pistons tandis que l’entrée est considérée comme une sortie libre.

Les simulations dans un arbre à deux générations ont permis de travailler avec différents nombres de Reynolds (300, 600 et 1200) tout en ayant des temps de calcul relativement raisonnables (une vingtaine d’heures). L’arbre étant parfaitement symétrique (il a deux plans de symétrie), les flux obtenus le seront aussi. Les résultats des simulations dans cette géométrie ont de multiples intérêts. Tout d’abord elle va permettre de montrer que la *M-shape* existe aussi en régime instationnaire, mais seulement durant l’inspiration, ce qui valide les résultats obtenus en régime stationnaire dans le cadre inspiratoire. Ensuite, elle va mettre en évidence le fait que même avec une respiration symétrique en temps, c’est à dire avec un mouvement inspiratoire étant exactement l’opposé du mouvement expiratoire, les phénomènes inertiels sont très différents durant les deux phases de la respiration. Ce résultat est d’autant plus intéressant que sa mécanique n’est pas du tout la même selon que l’on inspire ou que l’on expire. A travers ces deux mécaniques différentes, les poumons gèrent donc cette dissymétrie.

La figure 3.20 montre des coupes des première et deuxième générations à différents moments du cycle respiratoire, dans un modèle à deux générations. Pour étudier ces coupes, la grandeur *irrégularité d’un profil* est définie par un nombre qui est son “écart au profil de Poiseuille”. Cet écart est calculé sur une section S d’une branche par la formule suivante :

$$E_{pois} = 100 \times \sqrt{\frac{\int_S |v_{sim} - v_{pois}|^2}{\int_S |v_{sim} + v_{pois}|^2}}$$

où v_{sim} est la vitesse obtenue par nos simulations sur la section S , v_{pois} est la vitesse de Poiseuille calculée de telle sorte que le flux à travers la section S soit le même pour v_{sim} et v_{pois} , c’est à dire $\int_S v_{sim} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S v_{pois} \cdot \vec{n} \, dS$. A noter que ce nombre est peu significatif pour les petites vitesses, c’est à dire autour des instants $t = 0 \, s$, $t = 2.5 \, s$ et $t = 5 \, s$, c’est pourquoi ils ne sont pas représentés sur les courbes de la figure 3.3.2. Comme le flux est très faible, sa forme est dans ce cas dictée par les erreurs numériques et le rapport calculé dans E_{pois} n’a plus de sens.

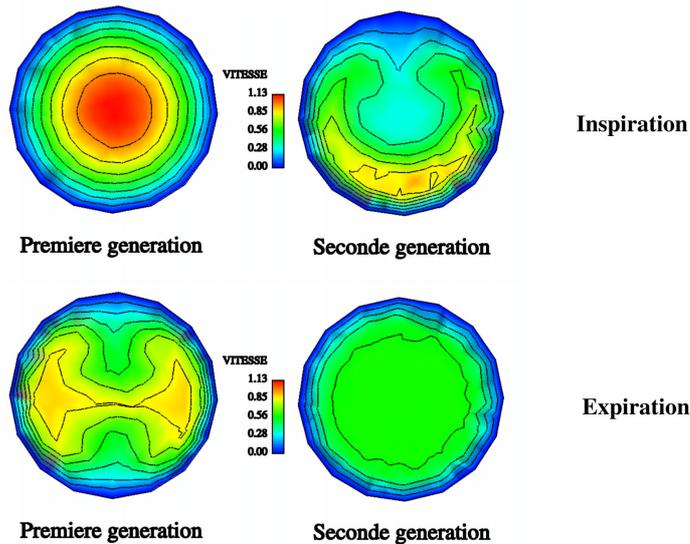


FIG. 3.20 – Profils de vitesses sur une section de la première et de la deuxième génération en régime instationnaire. En haut, les profils à l’inspiration, en bas les profils à l’expiration. Les instants choisis correspondent aux vitesses maximum (mi-inspiration et mi-expiration). Inspiration et expiration ne sont pas des phénomènes symétriques.

Les coupes du haut de la figure 3.20 correspondent à l’instant d’inspiration le plus véloce, tandis qu’en bas c’est le moment d’expiration le plus véloce qui est représenté. La différence entre les deux flux extrêmes est tout de suite visible. Pendant l’inspiration, le profil de la première génération est un profil de Poiseuille (voir la figure 3.3.2), tandis que la deuxième génération est le siège des mêmes effets d’inertie qu’en régime stationnaire : c’est la *M-shape*, qui a déjà été amplement décrite au chapitre 3.2.2. A noter que l’on retrouve ici, sans l’avoir imposé, un profil de Poiseuille en entrée, cela justifie la condition de flux parabolique choisie pour l’entrée en régime stationnaire. D’un point de vue irrégularité, on voit que l’on a un profil très régulier dans la première génération et un profil très irrégulier dans la deuxième génération (voir figure 3.3.2).

Au contraire, en régime expiratoire (coupes du bas de la figure 3.20), les irrégularités de profils dues aux effets d’inertie sont un peu plus fortes dans la branche de première génération que dans la branche de seconde génération. Deux pics de grandes vitesses apparaissent dans la direction des branches-filles. En terme d’écart au régime de Poiseuille, les profils expiratoires de première et deuxième génération restent néanmoins assez proches (écart à Poiseuille de l’ordre de 20% et 30%).

Ainsi, l’irrégularité est bien mieux répartie à l’expiration qu’à l’inspiration. Cette différence signifie qu’il est plus difficile de créer des flux homogènes dans les poumons pendant l’inspiration. Cette conclusion a forcément une conséquence énergétique : un flux irrégulier dissipe a priori plus d’énergie, ce qui est vérifié ici. La variation de l’énergie cinétique dissipée par le fluide au cours du temps peut être obtenue facilement en multi-

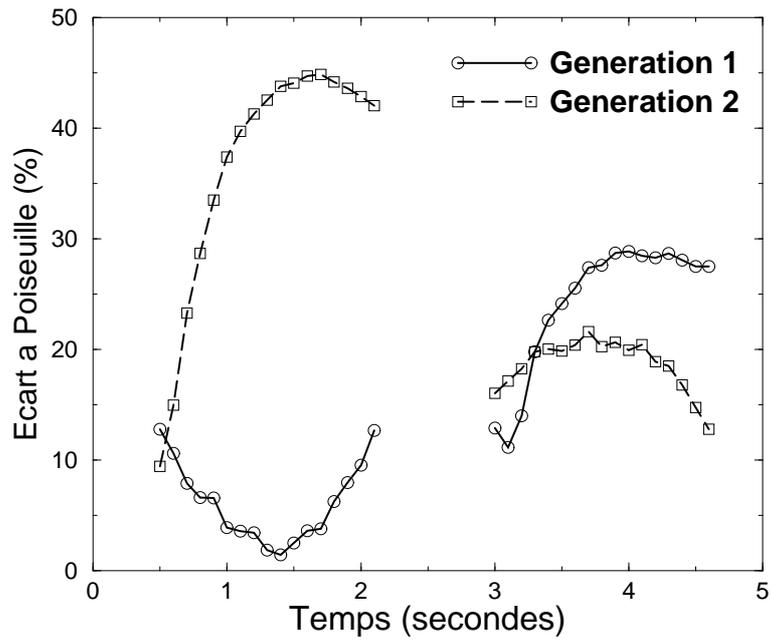


FIG. 3.21 – Mesure de l'écart aux profils de Poiseuille dans le cas $Re = 600$. Un profil est dit *irrégulier* quand son écart à Poiseuille est important ($\geq 20\%$).

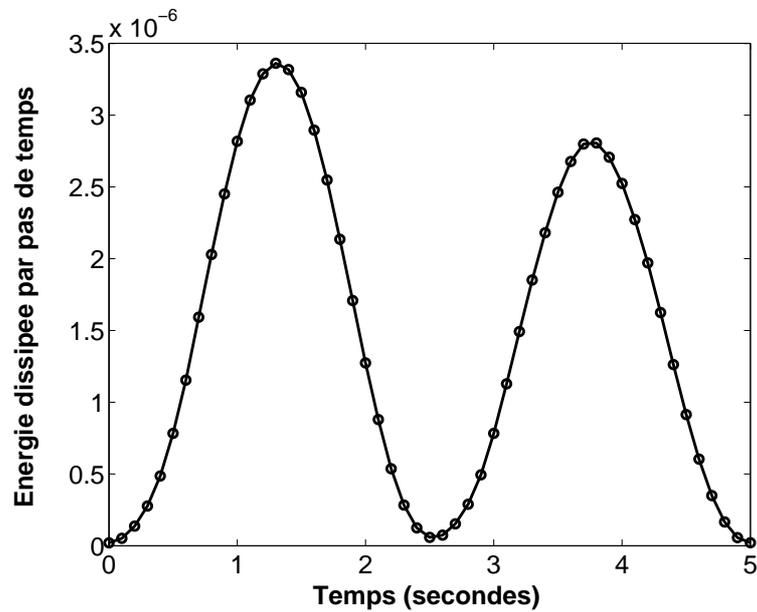


FIG. 3.22 – Energie dissipée $|\Delta E_c|$ par effet visqueux à chaque pas de temps pendant un cycle respiratoire dans un arbre à deux générations : $|\Delta E_c(t)| = \Delta t \times \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2$.

pliant l'équation de Navier-Stokes par la vitesse u , et en intégrant sur le volume :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u^2 = \frac{dE_c}{dt}(t) = -\mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \mu \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} u - \int_{\partial\Omega} P u \cdot \vec{n}$$

Elle est la combinaison de plusieurs termes : un terme, négatif, correspond aux frottements induits par les effets visqueux dans le volume ($-\mu \int_{\Omega} |\nabla u|^2$), tandis que les deux autres sont des termes de bords et correspondent à des échanges avec l'extérieur. D'un point de vue physique, les effets d'inertie (et en particulier la *M-shape*) vont entraîner des vitesses relativement importantes aux abords des parois et augmenter la dissipation énergétique. Ainsi, pendant l'expiration les effets d'inertie semblent qualitativement moins marqués que pendant l'inspiration, l'énergie dissipée par effets visqueux doit être plus faible. Cette hypothèse est en effet confirmée : la figure 3.22 montre la courbe de l'énergie dissipée par les effets visqueux pendant un pas de temps (ici le pas de temps est $\Delta t = 0.1$ seconde) au cours d'un cycle respiratoire dans une structure à deux générations. Dans cet exemple, le nombre de Reynolds vaut 1200.

A noter que l'écart entre les dissipations par effets visqueux à l'inspiration et à l'expiration reste peu important (de l'ordre de 10% pour $Re = 1200$) mais croît avec le nombre de Reynolds, en effet il est de l'ordre de 3% pour un Reynolds de 300, de l'ordre de 6% pour un Reynolds de 600. Cet effet de dissipation par viscosité peut donc devenir très important en régime d'exercice où le nombre de Reynolds peut atteindre 10000. Néanmoins la turbulence entrant en jeu pour ces flux à grandes vitesses, ce comportement est susceptible de changer quand le nombre de Reynolds devient trop grand.

Résultats, arbres à trois générations

Le flux a été simulé dans une structure plus complexe à trois générations, branchant de façon symétrique, munie des habituels pistons qui oscillent de façon sinusoïdale dans le temps (avec une période de cinq secondes) et qui imposent des flux identiques à chaque instant aux quatre extrémités. Le nombre de Reynolds en entrée est ici de 450, relativement bas pour faciliter la convergence. La différence de pression entre les extrémités des branches A et B (voir figure 3.23) a été mesurée au cours du cycle respiratoire. Elle est représentée par l'asymétrie en pression définie par :

$$\Sigma = 100 \times \left| \frac{P_A - P_B}{P_A + P_B} \right|$$

A noter que les pressions sont mesurées au niveau des extrémités des branches de la troisième génération A et B et que c'est la pression moyenne sur la section qui est considérée. Le temps de calcul dans une telle géométrie étant prohibitif (de l'ordre de la semaine sur un processeur à 1.2 Ghz), nous n'avons calculé que deux cycles respiratoires consécutifs, ce qui est insuffisant pour s'affranchir du régime transitoire. Néanmoins, les résultats ci-dessous donnent des informations d'ordre qualitatif.

Comme le flux (imposé) est le même aux quatre sorties, les pressions sont liées linéairement aux résistances par la relation $R = \Delta P / \Phi$. On peut donc indifféremment raisonner en terme de résistance ou de chute de pression. Une observation globale de la

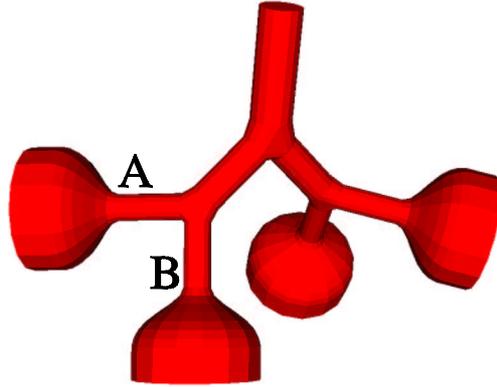


FIG. 3.23 – Modèle géométrique utilisé dans cette partie.

courbe de la figure 3.24 montre que l'asymétrie est nulle pour les trois quarts du cycle respiratoire, elle est non nulle et même très importante (jusqu'à 60%) pendant la phase inspiratoire correspondant aux plus grandes vitesses de l'air. A noter que l'on observe un décalage temporel entre le maximum de vitesse du piston et le maximum en asymétrie des pressions, ceci est dû au fait que l'on mesure les pressions à l'entrée des pistons alors que la vitesse des pistons est définie à leurs fonds. Cela crée un déphasage temporel qui correspond au temps nécessaire au phénomène pour se propager le long du piston.

Durant l'inspiration (de 0 à 2.5 secondes sur la figure 3.24), le flux ne voit pas les branches A et B comme identiques en terme de résistance. Ce phénomène est principalement dû aux effets d'inertie. En effet, quand les vitesses sont suffisamment grandes, l'air circulant dans la trachée acquiert une préférence directionnelle correspondant à l'axe de la trachée. Cela se traduit par le profil caractéristique de vitesse de la deuxième génération : la *M-shape*, voir chapitres précédents et [34]. Pour compenser ce phénomène et avoir un flux identique dans les branches A et B, la mécanique des fluides impose alors une plus grande dépression dans la branche non alignée avec la trachée (c'est à dire la branche A) que dans la branche inférieure (branche B). Ainsi pour pomper uniformément en flux, il convient d'imposer une force plus grande sur le piston en A que sur le piston en B (la force étant proportionnelle à la différence de pression à imposer). Un pompage global est alors plus souhaitable car il permet un gonflement homogène en flux des différentes sorties. Pour résumer, la force mise en jeu pendant l'inspiration sert non seulement à tendre des tissus élastiques, mais aussi à compenser des différences de pression locale dues à l'orientation des branches et aux effets inertiels de l'air. Ces observations sont identiques à celles faites en régime stationnaire, voir le chapitre 3.2.3.

Pendant l'expiration (de 2.5 à 5 secondes sur la figure 3.24), la pression est identique dans les branches A et B, donc imposer le même flux correspond à imposer des forces identiques. Etant donné que l'expiration est induite par l'élasticité des tissus, ces derniers ont donc, dans le cas de notre modèle symétrique, une élasticité identique. L'expiration est (et peut donc être) le résultat de forces à caractère plutôt local. D'un point de vue

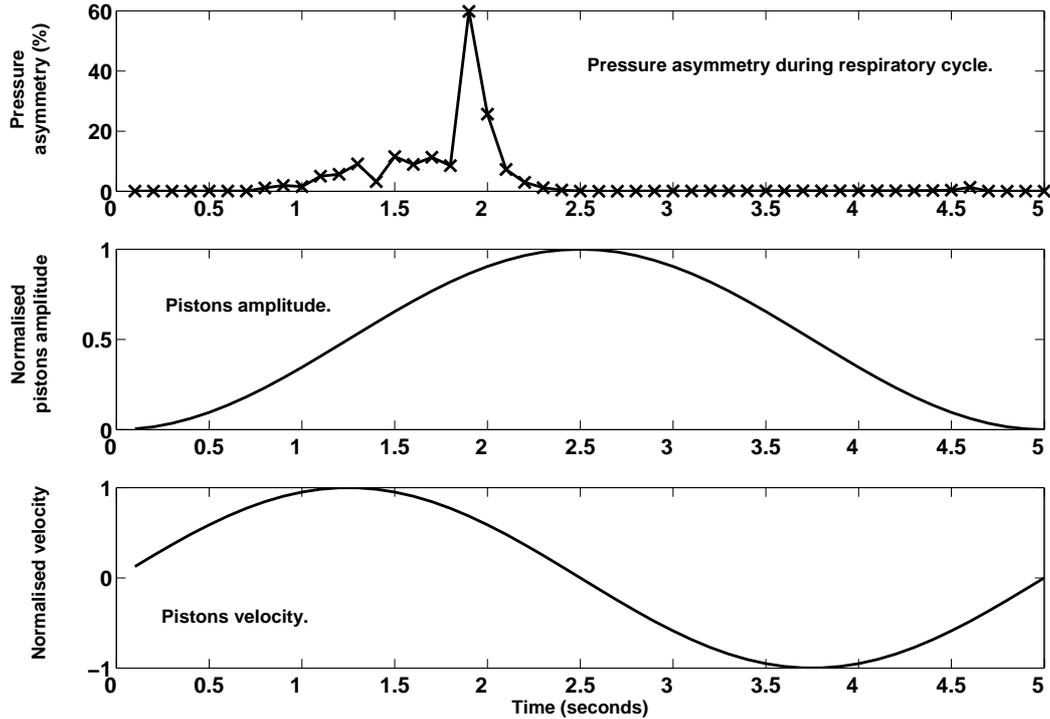


FIG. 3.24 – En haut, on observe que l’asymétrie en pression entre les branches A et B n’existe que pendant l’inspiration quand les vitesses deviennent importantes. Au milieu et en bas, l’amplitude et la vitesse du fond des pistons est déphasée par rapport à l’asymétrie du flux car cette dernière est mesurée à l’entrée des pistons.

résistif, les branches A et B ont donc une résistance identique à l’expiration.

On doit donc représenter différemment ce système selon que l’on est en régime inspiratoire ou expiratoire. La figure 3.25 représente un modèle mécanique de la respiration. Pour résumer, l’inspiration nécessiterait une répartition inhomogène de forces dues aux effets d’inertie inspiratoires, un mouvement global permet donc d’homogénéiser les amplitudes respiratoires sans avoir un contrôle local de chacun des pistons. A noter qu’en terme énergétique, l’inspiration doit compenser à la fois les effets d’inertie et l’élasticité des tissus. A l’expiration, au contraire, les forces mises en oeuvre sont les mêmes : cela peut être contrôlé par une réponse élastique locale identique. Dans le poumon, qui est un arbre dissymétrique, l’inspiration est le résultat d’un ensemble de muscles entraînant un mouvement global de l’arbre qui réagit différemment selon ses propriétés élastiques locales (“effet éponge”). Ce sont ces mêmes propriétés élastiques qui permettent alors l’expiration.

3.3.3 Modèle réaliste

Jusqu’ici les simulations effectuées ont eu pour objet des géométries idéalisées permettant de comprendre les propriétés des flux dans un cadre suffisamment simple. Compte-

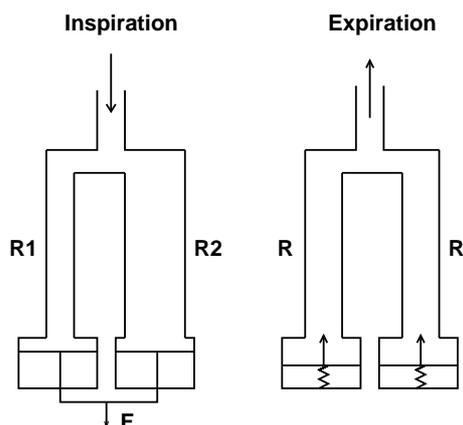


FIG. 3.25 – Modèle mécanique respiratoire d’un arbre à branchements symétriques soumis à des phénomènes d’inertie. A gauche, le modèle inspiratoire, avec une pompe unique pour les deux sorties qui ont des résistances différentes R_1 et R_2 ; Cette pompe est activée par une force extérieure F (musculaire). A droite, le modèle expiratoire, avec des pompes indépendantes mais identiques pour les deux sorties qui, cette fois, possèdent des résistances identiques ; Elle sont activées par l’élasticité des ressorts tendus lors de l’inspiration (les ressorts représentent la propriété d’élasticité des tissus).

tenu des observations déjà effectuées dans les sections précédentes, il est désormais envisageable de travailler avec des modèles géométriques et respiratoires plus réalistes et d’en tirer des conclusions intéressantes. Au niveau de modélisation que nous avons atteint, beaucoup d’applications sont dès aujourd’hui envisageables : études des dépôts de particules, meilleure compréhension des pathologies ayant des conséquences sur les flux, etc. Un calcul réaliste représente donc un enjeu important. Le temps de calcul dans de telles géométries, pour l’instant réduites à trois générations, est cependant de l’ordre de la semaine sur un ordinateur à 1.2 Ghz.

Géométrie

La géométrie qui a été choisie est issue de l’algorithme écrit par H. Kitaoka [30] qui, à partir d’un volume, construit un arbre dont la fonction est d’irriguer ce volume. Cette méthode est basée sur un ensemble de règles déterministes qui construisent l’arbre du haut vers le bas. En exécutant cet algorithme sur un volume correspondant aux poumons, le résultat est un arbre dont les propriétés statistiques (et visuelles !) sont très proches des poumons humains. Les trois premières générations de ce modèle, complètement asymétriques, ont donc été utilisées pour cette simulation. Des pistons évasés ont été ajoutés aux extrémités de l’arbre pour modéliser les dernières générations. A noter que cette fois les branches de la dernière génération sont toutes différentes, en particulier elles ont un diamètre différent, les pistons ont toutefois tous la même base (disque de diamètre 3 cm).

Pour information, voici les dimensions de chacune des branches obtenues grâce à l’algorithme de Hiroko Kitaoka [30], z est le numéro de la génération, D et L sont res-

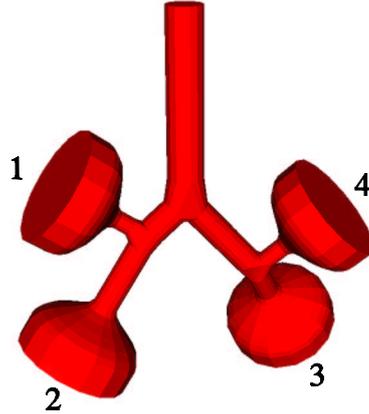


FIG. 3.26 – Géométrie réaliste correspondant aux trois premières générations du modèle de Hiroko Kitaoka. Les branchements sont asymétriques. Des pistons évasés ont été ajoutés pour modéliser les générations suivantes. Le mouvement d’air est créé par leurs oscillations.

pectivement le diamètre et la longueur des branches. Les numéros entre parenthèses dans la colonne z (branches de génération 3) correspondent à leur numérotation sur la figure 3.26 :

z	D	L
1	1.80 cm	9.40 cm
2	1.43 cm	2.57 cm
2	1.38 cm	5.54 cm
3(1)	0.91 cm	1.81 cm
3(2)	1.27 cm	4.05 cm
3(3)	1.19 cm	2.37 cm
3(4)	0.95 cm	1.91 cm

Respiration

Pour modéliser de façon réaliste la respiration, il faut une inspiration qui dure deux secondes et une expiration qui en dure trois. Le profil des amplitudes des pistons doit toutefois être suffisamment régulier, et le modèle suivant, à base de fonctions cosinus, a été utilisé :

$$a(t) = \begin{cases} A \times \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{2\pi t}{4})] & \text{si } t \in [0, 2] \\ A \times \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{2\pi(t+1)}{6})] & \text{si } t \in]2, 5] \end{cases}$$

Et on prolonge cette fonction par périodicité sur \mathbb{R}^+ . A noter que A est l’amplitude du piston, elle va dépendre de la branche considérée. La figure 3.27 montre l’allure de a avec $A = 1$ sur deux périodes.

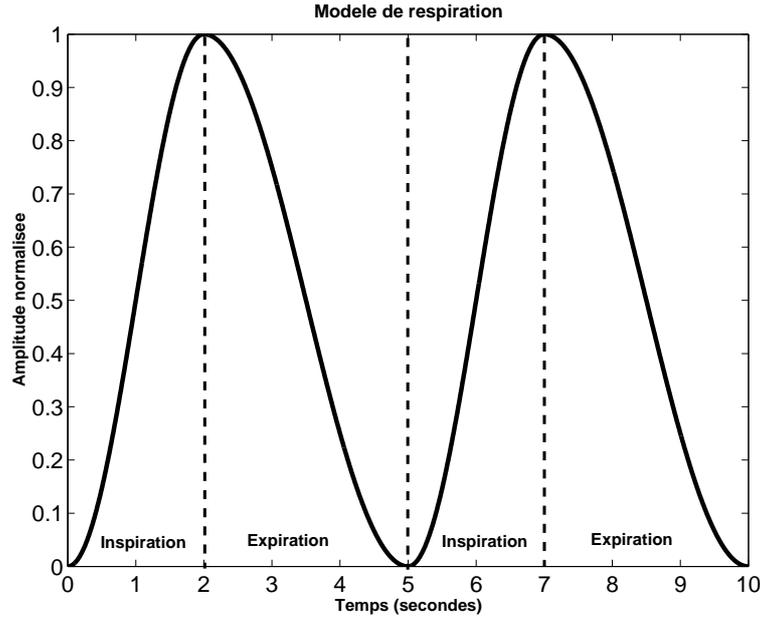


FIG. 3.27 – Modèle de respiration : amplitude normalisée des pistons.

La détermination de l'amplitude des pistons a été effectuée en supposant que la surface de la branche de troisième génération était proportionnelle au volume à remplir et donc au flux traversant la branche. Cette hypothèse n'est pas en général vraie, en particulier à cause des effets d'inertie, mais elle reste malgré tout une assez bonne approximation. Numérotons les branches de troisième génération comme sur la figure 3.26, et notons Δ_i l'amplitude du piston numéro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et R le rayon de leur base. Nous cherchons à fournir un volume respiratoire $V_T = 475 \text{ ml}$ donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{D_i^2}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2}, i = 1, 2, 3, 4 \\ \pi R^2 (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) = V_T \\ \alpha_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}, i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

La première équation signifie que α_i est la fraction de surface de la branche i relativement à la surface totale de la troisième génération. Par hypothèse, α_i est aussi la fraction du flux total traversant la branche i . Ainsi, la troisième équation dit que α_i est la fraction du volume d'air à fournir à la branche i . Enfin la seconde équation signifie que le volume maximum inspiré doit être V_T . Finalement, on trouve $\alpha_1 = 17\%$, $\alpha_2 = 34\%$, $\alpha_3 = 30\%$ et $\alpha_4 = 19\%$. La résolution du système restant permet de déterminer les amplitudes des pistons pour $V_T = 475 \text{ ml}$:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 2.86 \text{ cm} \\ \Delta_2 &= 5.71 \text{ cm} \\ \Delta_3 &= 5.04 \text{ cm} \\ \Delta_4 &= 3.19 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ainsi si on a un flux ϕ en entrée, les branches de troisième génération recevront des flux $\alpha_1\phi$, $\alpha_2\phi$, $\alpha_3\phi$ et $\alpha_4\phi$.

Résultats

Les résultats obtenus sont cohérents avec les observations précédentes, ainsi à l'inspiration, voir figure 3.28, le flux dans la première génération est très régulier (profil parabolique). Sur les coupes des deux branches de deuxième génération apparaissent des profils assez proches de la *M-shape*. Toutefois ces profils ne sont pas seulement la cause des effets d'inertie, en effet les pistons des branches 2 et 3 pompent plus de flux que les pistons 1 et 4 (le piston 2 pompe 34% du flux et le piston 3 30%), le profil de vitesse dans les branches de la seconde génération doit donc forcément être déformé vers les branches du bas (et ce même si on était en régime de Poiseuille). Ainsi, les effets d'inertie sont bien adaptés à la géométrie ou réciproquement puisqu'ils favorisent à l'inspiration les branches 3 et 4, qui nécessitent plus de flux. Les coupes de la troisième génération montrent que l'inertie existe toujours à ce niveau et que son influence est variable selon la branche : les quatre profils sont très différents. Dans la branche 1, les vitesses commencent déjà à s'homogénéiser (17% du flux) tandis que dans les autres branches elles sont encore déformées.

A l'expiration, présentée sur la figure 3.29, les quatre branches de la troisième génération ont des profils réguliers. A la deuxième génération apparaissent des vitesses déformées vers les pistons 2 et 3 qui fournissent plus de flux. Enfin dans la première génération un profil avec une poche de vitesses plus importantes au centre est visible. Cette poche est due aux flux provenant de la deuxième génération qui se rencontrent au centre de la trachée. A noter que les vitesses maximales sont plus faibles qu'à l'inspiration car la durée de l'expiration est plus grande. Cela permet ainsi de réduire les phénomènes inertiels et de diminuer les risques potentiels liés à la nature passive de la mécanique (forces élastiques).

Notons que la compréhension du flux dans une structure si complexe est grandement facilitée par l'étude préliminaire des phénomènes dans des géométries symétriques.

3.4 Conclusion

L'étude des flux dans des modèles des premières générations du poumon a des implications importantes pour la compréhension et la modélisation de l'arbre pulmonaire. Tout d'abord il est fondamental de noter les grandes différences qui existent entre les deux phénomènes que sont l'inspiration et l'expiration. Les effets d'inertie en sont la

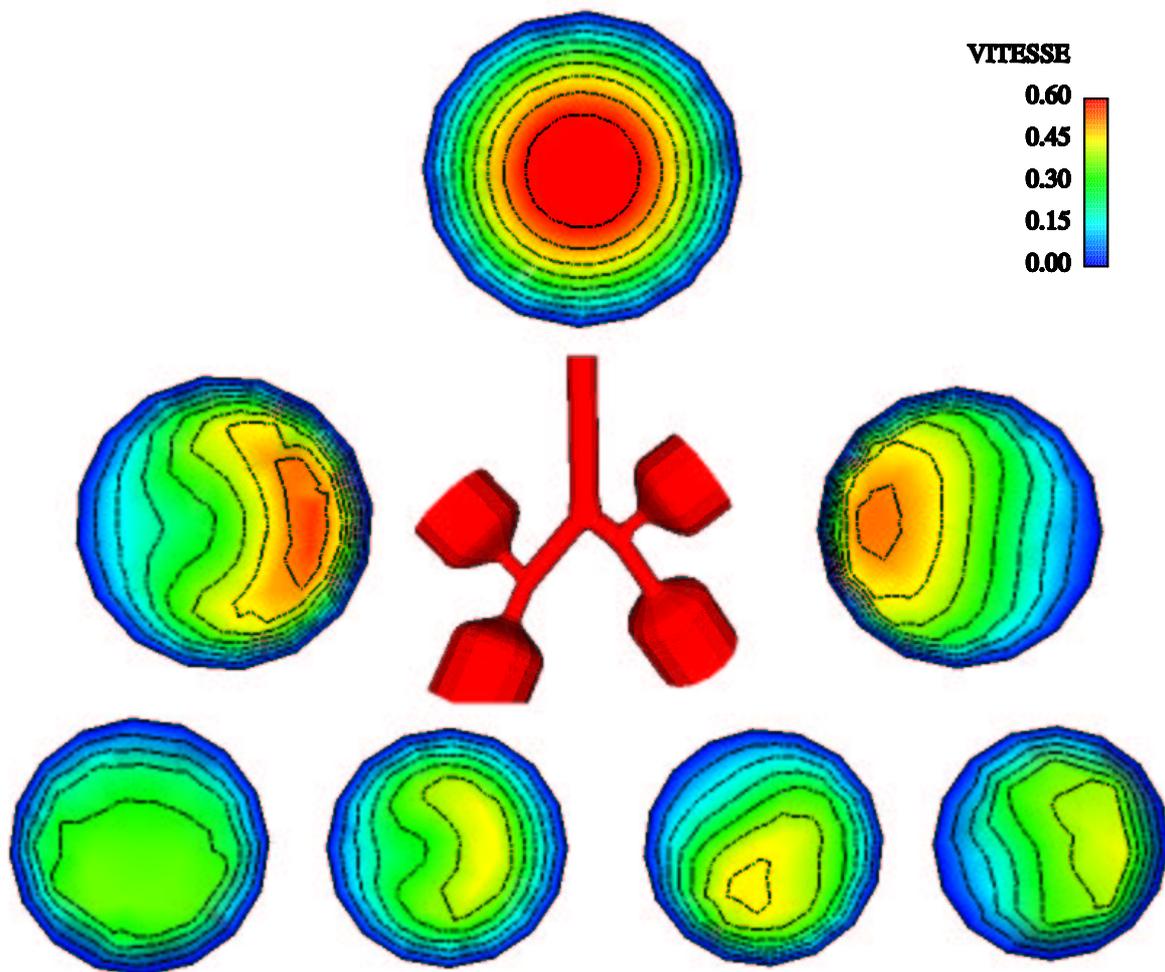


FIG. 3.28 – Profils de vitesses pendant l'inspiration (instant où les vitesses sont maximales).

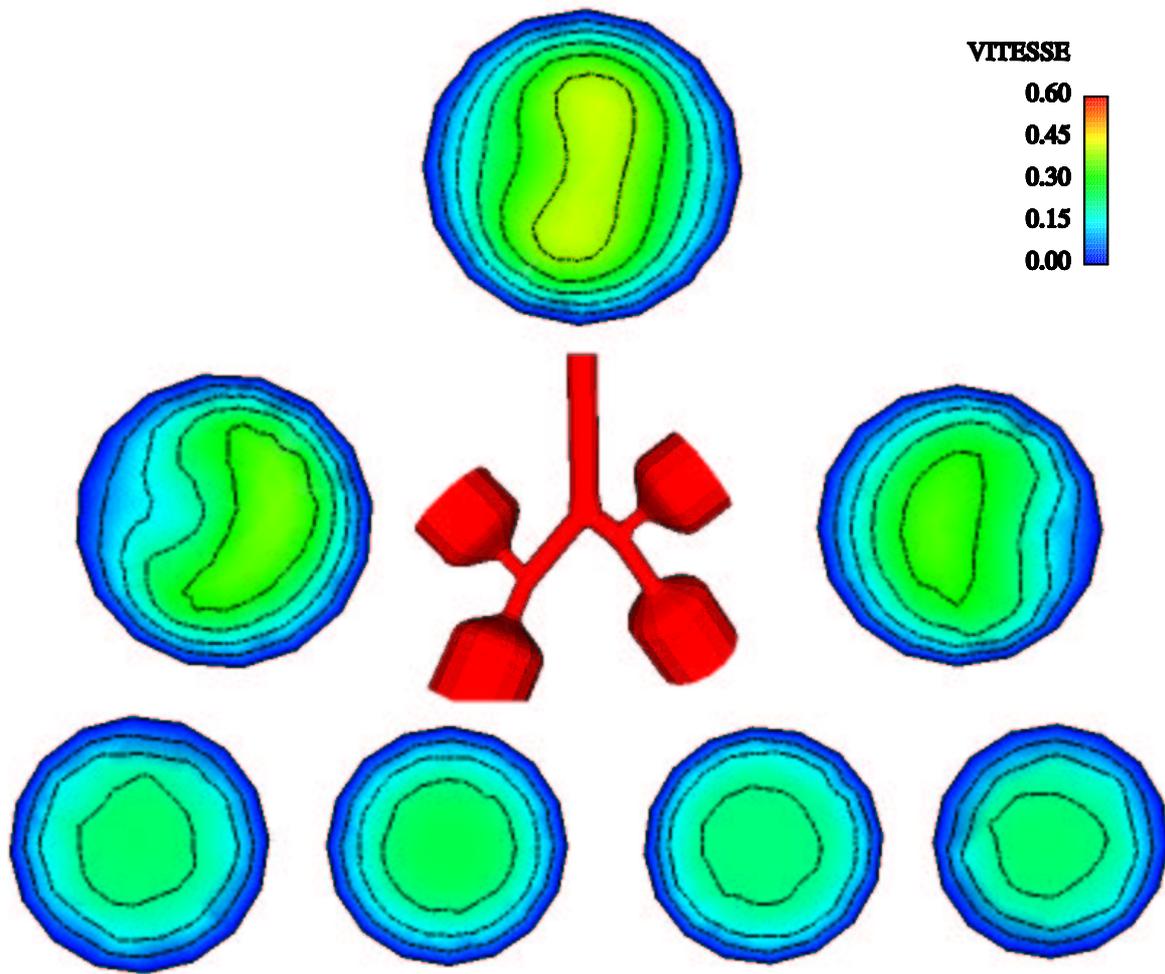


FIG. 3.29 – Profils de vitesses pendant l'expiration (instant où les vitesses sont maximales).

cause et ils ont des conséquences importantes sur la répartition des flux, principalement à l'inspiration, conséquences que le poumon ne peut négliger. Ainsi ces flux doivent être régulés si on veut éviter une grande inhomogénéité. La seule structure pouvant répartir convenablement le flux est en effet très sensible à la moindre variation. On s'aperçoit que même en imposant les flux, l'inertie entraîne de grandes différences de pression que doivent compenser les forces inspiratoires. Ainsi, un mouvement global devient préférable pour gonfler la structure. Au contraire, l'expiration est moins contraignante et les effets d'inertie n'imposent pas de contraintes réelles. Une poussée élastique définie localement devient alors suffisante pour évacuer l'air.

Les résultats de cette section permettent aussi de déterminer une génération seuil à partir de laquelle ces effets d'inertie deviennent négligeables. Au régime de repos, on peut considérer que le flux devient un flux de Poiseuille à partir de la sixième génération. Cette propriété permet alors de travailler avec des équations simplifiées, les équations de Stokes, et de faire une étude analytique des générations suivantes.

Bien d'autres applications à ces calculs sont envisageables, en particulier l'étude des flux dans des reconstructions de poumons issues de l'imagerie médicale. Comparer ces flux entre des poumons normaux et pathologiques peut aider à la compréhension de certaines pathologies. Le potentiel de l'étude de la déposition des particules dans ces géométries réalistes est énorme, que ce soit pour une meilleure compréhension des dépôts de goudrons (pollution) ou de spray (médicaments). Dans un cadre plus général, les résultats de cette section permettent de mieux comprendre les flux dans les structures arborescentes, très courantes dans la vie de tous les jours (par exemple en industrie pour la distribution de l'eau, des fluides de refroidissement, pour les aérations, etc.). L'étude des chemins des particules circulant dans des arbres parcourus par des fluides a aussi de nombreuses applications, par exemple le lancer de particules peut être utilisé pour déterminer des propriétés géométriques d'une structure arborescente. Actuellement, nous travaillons en collaboration avec J.S. Andrade (Brésil) sur ce sujet.

La partie 3.2 de ce chapitre a été le sujet d'un article publié dans *Physical Review Letters*, dont voici les références :

Interplay between geometry and flow distribution in an airway tree.

B. Mauroy¹, M. Filoche², J. S. Andrade Jr.^{1,3}, and B. Sapoval^{1,2}

Physical Review Letters, **90**, 148101 1-4, 11 Avril 2003

¹ Centre de Mathématiques et de leurs Applications, CNRS, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 94235 Cachan, France

² Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, CNRS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

³ Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, 60451-970 Fortaleza, Ceará, Brazil

Chapitre 4

Flux dans les petites bronches (génération 7 à 17)

Le rôle des structures branchées dans les systèmes physiologiques a été beaucoup étudié. Récemment, il a été démontré que des arbres fractals peuvent être à la fois *space-filling* [32] et assurer une dissipation minimale [66, 12, 3]. L'arbre bronchique chez la plupart des mammifères est un bon exemple d'une telle structure, système quasi fractal mais aussi efficace pour la distribution de l'air [37, 64]. Toutefois, l'argument physique qui est à l'origine des caractéristiques optimales d'un arbre bronchique fractal (le "meilleur" arbre) impose aussi que cette structure est critique, en ce sens que de petites variations dans la géométrie de l'arbre induisent une importante réduction du flux d'air. Une efficacité physique maximale ne peut donc être le seul critère qui définit la structure des arbres bronchiques. La géométrie et les dimensions des structures branchées, comme les vaisseaux sanguins ou les bronches, sont des caractéristiques importantes pour déterminer l'efficacité des processus physiologiques. Dans cette partie, nous allons étudier la compatibilité entre l'optimisation physique et la robustesse physiologique du poumon humain.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les phénomènes d'inertie jouent un rôle important dans la distribution des flux. Néanmoins ces effets ne se font sentir que dans un nombre limité de générations du poumon, plus précisément dans les six premières au repos, et le flux qui circule dans les générations suivantes peut être considéré comme non inertiel. Plus précisément, nous allons étudier ici la circulation de l'air dans des arbres de onze générations correspondant aux parties du poumon allant des générations sept à dix-sept. Le modèle non-inertiel et la symétrie dans l'espace représentent de bonnes approximations de la structure du poumon à ces générations. D'un point de vue mathématique, le problème devient alors suffisamment simple pour être étudié analytiquement. Bien que le régime lent, dit de Poiseuille, soit très régulier, il peut être difficile de faire circuler un flux dans un arbre construit sans précautions. Tout d'abord, pour mieux respirer, la géométrie doit pouvoir fonctionner dans des conditions précises et limitées de volume et d'énergie : ainsi, l'évolution a minimisé la résistance, tout en tenant compte des contraintes physiques imposées. Toutefois, cette résistance étant la conséquence d'un effet multiplicateur (dû à la structure arborescente), elle est excessivement sensible aux variations, même petites, des paramètres structurels. Son utilisation par des êtres vivants, qui sont par essence soumis à de grandes variabilités, doit donc



FIG. 4.1 – Zoom sur les petites branches du moulage d’un poumon humain effectué par E.R. Weibel. On voit qu’à petite échelle, les branches sont beaucoup plus “régulières”. Un modèle de branchement homothétique est donc relativement réaliste.

forcément tenir compte de ces écarts et le poumon doit se doter de *marges de sécurité* suffisantes. Outre cette variabilité de conception, l’arbre bronchique doit aussi gérer les réadaptations incessantes de la géométrie (adaptation des diamètres des bronches, respiration, etc.) et une marge trop faible peut entraîner des dysfonctionnements graves comme l’asthme. Ainsi, paradoxalement, nos résultats suggèrent que certains dysfonctionnements du système bronchique sont des conséquences structurelles indispensables au poumon s’il veut être suffisamment efficace (et en particulier s’il est optimal).

4.1 Hypothèses

4.1.1 Géométrie

Dans ce qui suit, la terminologie *arbre* fait référence, sauf mention contraire, à un arbre dichotomique, branchant de façon symétrique et ayant un nombre de générations finis (généralement dénombré par la quantité $N + 1$, $N \in \mathbb{N}$). La configuration géométrique spatiale dans le cadre hydrodynamique supposé ici (régime de Poiseuille) n’a pas de conséquence sur le flux. Néanmoins pour irriguer l’ensemble du volume pulmonaire, une structure *space-filling* doit être utilisée. Ainsi dans les chapitres ci-dessous, seules les hypothèses influençant le flux seront utilisées (longueurs et diamètres des branches) et les autres propriétés (comme l’orientation des branches), indépendantes, seront sous-entendues pour que l’arbre ait les bonnes propriétés de remplissage du volume.

Les poumons réels sont dissymétriques dans les premières générations, qui permettent à l’arbre de s’adapter à l’anatomie globale, par exemple en évitant le coeur. Toutefois on

s'aperçoit que plus on descend dans les générations, plus les branches ont tendance à être, d'une génération à l'autre, homothétiques. En particulier cette hypothèse sous-entend que les propriétés géométriques locales du poumon sont les mêmes. Plus précisément, cela signifie que deux zones assez proches sont sensiblement les mêmes. Ainsi, si on travaille avec un sous-arbre du poumon assez profond (commençant à une génération plus grande que quatre ou cinq), on peut supposer que les branches d'une même génération sont identiques. De plus, les branches de la génération $i + 1$ sont considérées comme des réductions par une homothétie de facteur h_i des branches de la génération i . Cette hypothèse est compatible avec les données de Weibel [61]. Pour se convaincre "visuellement", la figure 4.1 montre un grossissement du moulage d'un poumon humain réalisé par E.R. Weibel. La plus grosse branche (en bas à gauche, vers l'arrière) est une branche de quatrième génération, certaines des plus petites branches peuvent atteindre la quinzième génération, voir plus.

Dans cette section, les arbres modélisés correspondent à ces sous-arbres du poumon (générations sept à dix-sept en régime de repos). Chacun des sous-arbres est supposé fonctionner avec des pressions identiques à chacune de ses sorties. Cette hypothèse est justifiée par la figure 4.2. La région 1 est la partie de l'arbre soumise aux effets d'inertie, les pressions aux extrémités de cette zone sont donc différentes à cause de ces effets (dans le cas de l'inspiration, voir chapitre 3.2.2) et de l'asymétrie de l'arbre. En régime de repos, la région 1 correspond aux générations 1 à 6. Dans la région 2, non seulement le flux peut être modélisé par le régime de Poiseuille mais l'arbre est aussi beaucoup plus régulier (voir ci-dessus), on a pu supposer que les branches d'une même génération sont identiques. Dans ce cas, tous les chemins du sommet vers la base des sous-arbres de la région 2 sont les mêmes (ils ont même résistance). Au bout de ces chemins, des petites pompes (les acinus) créent le mouvement de l'air. En première approximation elles sont toutes identiques, et donc la différence de pression entre chacune des sorties d'un sous-arbre et son entrée est bien la même.

La figure 4.3 résume les hypothèses faites dans ce chapitre 4 : nous travaillons avec un sous-arbre du poumon, correspondant aux générations sept à dix-sept, modélisé par un arbre dichotomique branchant de façon symétrique. Les branches décroissent en taille d'un facteur h_i en passant de la génération i à la génération $i + 1$. Ainsi après p générations, les tailles sont réduites d'un facteur $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_p$. Pour définir la taille de l'arbre, il suffit donc de donner les propriétés de la première branche : sa résistance est R_0 et son volume V_0 . Dans tout ce chapitre on négligera toujours les volumes et résistances des intersections des tubes qui sont négligeables devant celles des branches.

4.1.2 Régime de Poiseuille

Les équations de la mécanique des fluides en régime lent proviennent des équations de Navier-Stokes dans lesquelles on a négligé le terme non-linéaire $u \cdot \nabla u$ grâce à l'hypothèse des petites vitesses. Ainsi on obtient les équations de Stokes ou équations de Navier-Stokes linéarisées,

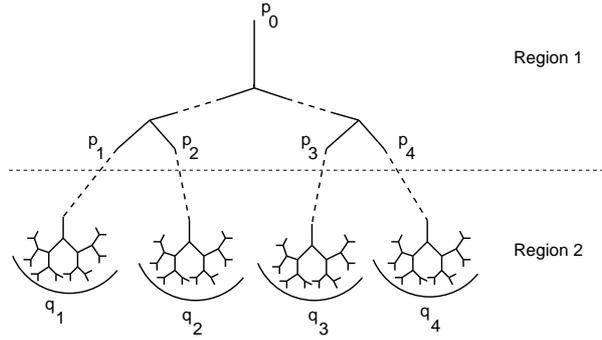


FIG. 4.2 – Justification du modèle choisi où l'on impose des pressions identiques aux extrémités des arbres. La région 1 correspond aux premières branches du poumon : elle est donc plutôt dissymétrique et soumise aux effets d'inertie, ce qui a priori crée des inhomogénéités en pression (p_1 , p_2 , p_3 et p_4 sont a priori différentes). Au contraire dans la région 2, les générations sont beaucoup plus homogènes et les effets d'inertie absents. On peut donc supposer que le pompage est, à ce niveau, symétrique. Ainsi, les extrémités d'un sous-arbre de la région 2 sont toutes à la même pression (q_i pour le sous-arbre numéro i).

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla P = 0 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Ces équations sont beaucoup plus simples, en particulier pour l'existence et l'unicité, voir [50]. Plusieurs propriétés importantes et nécessaires pour la suite vont être montrées dans ce chapitre dans le cadre géométrique particulier d'un cylindre de base circulaire en 3D : l'existence de solutions stationnaires et invariantes selon l'axe du cylindre, l'existence de la grandeur appelée *résistance* reliant le flux et la chute de pression et enfin les conséquences d'un changement d'échelle.

Tout d'abord définissons la géométrie, il s'agit d'un cylindre de révolution avec une face d'entrée E , une face de sortie S et une paroi P , voir figure 4.4. Les conditions aux bords imposées sur P sont des conditions de Dirichlet de non-glissement : $u = 0$.

Décroissance des vitesses moyennes avec la génération

Ce paragraphe s'applique aussi dans le cadre des équations de Navier-Stokes (donc en présence des effets d'inertie) car les résultats ci-dessous n'utilisent que l'équation de conservation de la masse $\operatorname{div}(u) = 0$. Considérons donc ce terme, $\operatorname{div}(u) = 0$, et intégrons le sur un volume U inclus dans le cylindre :

$$0 = \int_U \operatorname{div}(u) \, dx dy dz = \int_{\partial U} u \cdot \vec{n} \, dS$$

où \vec{n} est la normale au bord de U , noté ∂U , et dS son élément de surface. Le terme $\int_{\Sigma} u \cdot \vec{n} \, dS$ correspond au flux à travers la surface Σ . La formule ci-dessus signifie donc

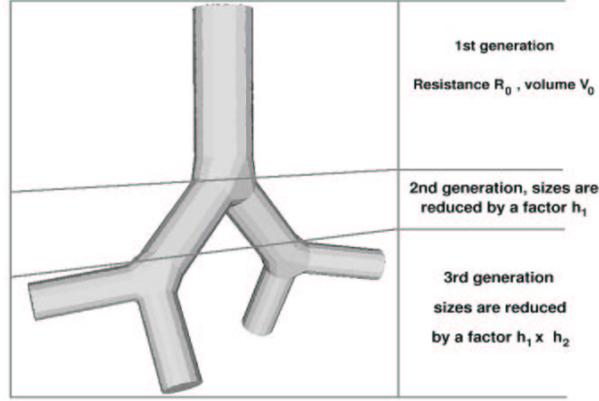


FIG. 4.3 – Schéma de la géométrie considérée dans ce chapitre : l’arbre est dichotomique et a une structure branchant symétriquement et homothétiquement. Les branches de la seconde génération sont des réductions des branches de la première par un facteur h_1 . Les branches de la troisième génération sont des réductions des branches de la première par un facteur $h_1 \times h_2$ et ainsi de suite.

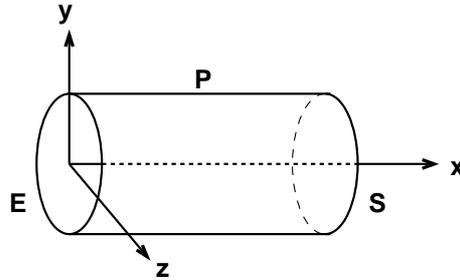


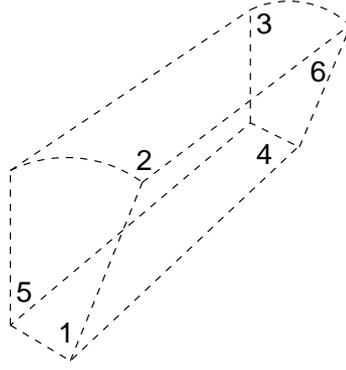
FIG. 4.4 – Géométrie dans lequel vit le flux de Stokes de ce chapitre. E est l’entrée (ie en général avec un flux positif), S la sortie (flux négatif) et P la paroi.

que dans tout volume il y autant de flux qui entre que de flux qui sort, un exemple en est donné figure 4.5. Cette propriété impose que dans un volume le flux se conserve, la divergence nulle correspondant à l’absence de sources ou de puits de flux.

Ainsi, on peut montrer que les vitesses moyennes décroissent dans le poumon avec la génération. En effet, considérons la surface totale S_n des sections à la génération n . Etant donné que les vitesses sont nulles sur la paroi de l’arbre, on sait que par conservation du flux : $\int_{S_n} u \cdot \vec{n} dS = \int_{S_{n-1}} u \cdot \vec{n} dS$. Or si v_n est la vitesse (normale aux sections) moyenne à la génération n , $v_n \times S_n = \int_{S_n} u \cdot \vec{n} dS$. Ainsi :

$$v_n \times S_n = v_{n-1} \times S_{n-1}$$

Or S_n croît avec n , donc v_n décroît avec n . Plus précisément, si on considère en première approximation le poumon comme un arbre dichotomique fractal (pour la justification de cette hypothèse, voir la preuve au paragraphe 4.2.2 et la discussion en 4.2.3), on peut supposer que le diamètre des branches décroît avec un facteur h . Si s_n est la surface



$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 = 0$$

FIG. 4.5 – Exemple de conservation des flux. Si on ajoute les flux entrant dans chacune des faces, la somme obtenue est nulle.

de la section d'une branche de la génération n , alors : $S_n = 2^n \times s_n = 2^n \times h^2 \times s_{n-1} = 2h^2 \times S_{n-1}$. Donc S_n est une suite géométrique de raison $2h^2$, or dans les poumons $h > \frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}$ et ainsi $2h^2 > 2^{\frac{1}{3}} \sim 1.26 > 1$ (en fait on peut obtenir $h \sim 0.85$ d'après les données de Weibel, voir figure 4.8, dans ce cas la surface augmente d'un facteur de 1.45 à chaque génération).

A noter qu'en présence d'effets d'inertie, il est possible d'avoir des branches avec de grandes vitesses localisées sur des petites surfaces (comme la *M-shape*, voir chapitre 3.2), ainsi, bien que le flux soit toujours conservé, le résultat précédent n'a un sens que pour les vitesses *moyennes* de chaque génération. Au contraire, dans le cadre du régime de Poiseuille et d'un arbre à branchements symétriques, les vitesses moyennes sont parfaitement représentatives du flux. Cette décroissance des vitesses a été mesurée dans les poumons, ainsi, au repos, l'air y entre avec une vitesse de 1 m.s^{-1} tandis qu'à la base (au niveau des acinus), sa vitesse est quasiment nulle, voir [63].

Solutions stationnaires (3D)

Nous avons effectué quelques simulations numériques stationnaires en régime lent dans des structures arborescentes. Ces calculs ont montré que le flux dans chacune des branches était un flux indépendant de la section considérée. Le but de cette partie est de démontrer que cette condition est suffisante pour que l'on ait un flux de Poiseuille. Cela justifiera ainsi l'hypothèse du régime de Poiseuille utilisée dans le reste de ce chapitre.

Cherchons donc une solution stationnaire de l'équation 4.1, invariante selon l'axe du cylindre, c'est à dire l'axe x (voir figure 4.4). Ces deux hypothèses donnent : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Dans ce cas on peut réécrire les équations coordonnées par coordonnées ($u = (u_x, u_y, u_z)$),

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Si on suppose cette solution suffisamment régulière (C^3), on peut dériver les deuxième et troisième équations par rapport à x , ainsi comme u_y et u_z sont indépendante de x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial P}{\partial x}$ est indépendant de y et z . Maintenant considérons la première équation, on sait que $u_x = u_x(y, z)$ et que $\frac{\partial P}{\partial x}$ ne dépend que de x , donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \lambda \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{\mu} \lambda \end{aligned}$$

Finalement $P = \lambda \cdot x + P_r(y, z)$. Compte-tenu des conditions de bord $P = P_0$ en $x = 0$ et $P = P_1$ en $x = L$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_r(y, z) &= P_0 \\ \lambda &= \frac{P_1 - P_0}{L} \end{aligned}$$

On voit en particulier que P ne dépend que de x , le problème se réduit donc en des équations sur les seules vitesses

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \lambda \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

En ajoutant les conditions de bord de non-glissement ($u_x = u_y = u_z = 0$ sur la paroi P du cylindre figure 4.4) et compte-tenu de l'unicité de la solution de $\Delta f = 0$ sur Ω , $f = f_0$ sur $\partial\Omega$ (dans notre cas Ω est une section du cylindre, la démonstration se fait par formulation faible, voir [10]), on déduit que

$$u_y = u_z = 0$$

Finalement il reste à résoudre $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\lambda}{\mu}$ et $u_x = 0$ sur le bord. Toujours compte-tenu de l'unicité, on voit que l'unique solution s'écrit :

$$u_x = \frac{\lambda}{\mu} \frac{[(y^2 + z^2) - r^2]}{4}$$

où r est le rayon du cylindre. Finalement la seule solution stationnaire en temps et en x s'écrit :

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\lambda [(y^2+z^2)-r^2]}{4\mu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{P_1-P_0}{L}.x + P_0 \quad (4.2)$$

Ce régime est celui de *Poiseuille*, la pression P_0 est la pression de référence. L'intérêt de ce flux particulier est qu'il représente une sorte de point fixe des flux à petites vitesses : dans un tube comme celui présenté figure 4.4, quelque soit la condition d'entrée, le régime devient très rapidement un régime de Poiseuille. Pour plus de précision sur les équations de Stokes, voir [22].

Relation de Poiseuille (3D)

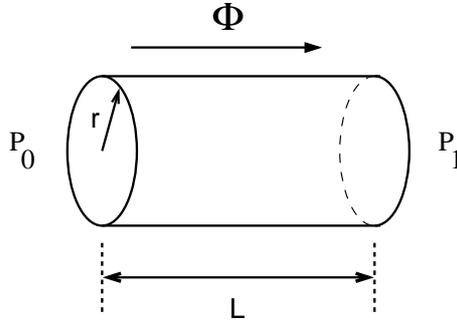


FIG. 4.6 – On impose une pression P_0 en entrée et une pression P_1 en sortie, cela crée un flux Φ à travers le tube, orienté de gauche à droite si $P_0 > P_1$. La relation de Poiseuille s'écrit alors $P_0 - P_1 = R \Phi$ où R est la résistance de la géométrie.

Considérons maintenant un tube de longueur L et de rayon r dans lequel circule un flux de Poiseuille (figure 4.6). Le flux le long d'une section est

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{s=0}^r \frac{\lambda (s^2 - r^2)}{4\mu} s ds d\theta = -\frac{\pi \lambda r^4}{8\mu}$$

Supposons connues les pressions d'entrée et de sortie du tube, respectivement P_0 et P_1 , alors on sait d'après l'équation 4.2 que $P_1 - P_0 = \lambda L$. En éliminant λ , on obtient la relation de Poiseuille

$$P_0 - P_1 = \frac{8\mu L}{\pi r^4} \Phi \quad (4.3)$$

et on appelle résistance le terme $R = \frac{8\mu L}{\pi r^4}$. Les propriétés de ces résistances sont exactement les mêmes que celle des réseaux électriques. Ainsi, deux branches de résistances R_1 et R_2 en série (c'est à dire bout à bout) ont une résistance globale $R_1 + R_2$, en parallèle (c'est à dire côte à côte et reliées à leurs extrémités) elles ont une résistance globale $(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})^{-1}$.

Changements d'échelle (3D)

Etant donné que ces résultats vont être appliqués dans le cas de structures fractales, il est important de déterminer le devenir des résistances et des volumes quand on multiplie les dimensions d'un cylindre par un rapport h (homothétie de rapport h). Dans ce cas, un cylindre de longueur L et de rayon r devient un cylindre de longueur $h \times L$ et de rayon $h \times r$. Ainsi si le cylindre initial a un volume V et une résistance R , sachant que $V \propto Lr^2$ et que $R \propto \frac{L}{r^4}$, le cylindre transformé a un volume $h^3 \times V$ et une résistance $\frac{R}{h^3}$. Il est intéressant de voir que l'on a la même puissance de h dans les deux cas mais qu'elle est au numérateur pour le volume et au dénominateur pour la résistance. Cette remarque est fondamentale pour la suite car elle va rendre possible l'optimisation de la résistance à volume fixé.

4.2 Résistance vs volume

Les deux grandeurs mises en évidence jusqu'ici pour caractériser l'arbre sont la résistance et le volume. Chacune des deux a des conséquences importantes sur un arbre destiné à distribuer un fluide dans un domaine. La résistance correspond à l'énergie qu'il va falloir dépenser pour créer un flux à travers la structure. Ainsi, une résistance trop grande ne peut être envisagée (mauvais rendement). De même le volume disponible est limité par la taille maximale autorisée du système (en particulier pour les poumons). Enfin on ne peut le remplir complètement par de la "tuyauterie", de l'espace étant nécessaire pour disposer la surface de transfert (les acinus). Obtenir les expressions de ces deux nombres en fonction des paramètres géométriques est donc indispensable pour bien comprendre comment ces contraintes peuvent s'influencer l'une et l'autre.

4.2.1 Calculs de la résistance et du volume

Calcul de la résistance :

Rappelons rapidement les hypothèses géométriques (voir paragraphe 4.1.1). La résistance de la première branche est supposée connue, elle est notée R_0 . L'arbre est supposé brancher de façon symétrique et dichotomique. Les branches de la génération $i + 1$ sont les images par une homothétie de rapport h_i des branches de génération i .

Proposition 1 *Si on néglige la résistance des intersections, la résistance totale d'un arbre de $N + 1$ générations vaut :*

$$R_N^{eq} = R_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{2^p} \frac{1}{(h_1 \times h_2 \times \dots \times h_p)^3} \right] \quad (4.4)$$

Démonstration :

Une récurrence sur le nombre de générations $N + 1$ de l'arbre prouve le résultat. En effet, pour $N = 0$, la résistance de l'arbre est R_0 . Supposons désormais que 4.4 soit vraie à l'ordre N . Considérons un arbre A à $N + 2$ générations, on peut le voir comme deux arbres

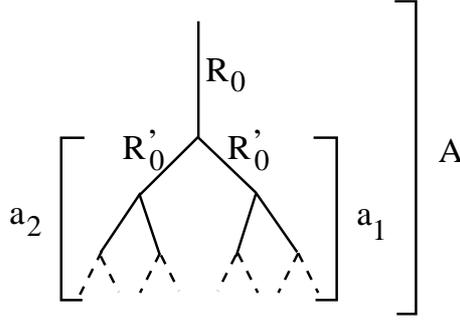


FIG. 4.7 – Calcul de la résistance. L'arbre A peut être considéré comme deux arbres identiques a_1 et a_2 reliés entre eux par l'entrée grâce à une branche de résistance R_0 . On appelle R'_0 la résistance des premières branches de a_1 et a_2 . On a alors par hypothèse $R'_0 = R_0/h_1^3$.

a_1 et a_2 de $N + 1$ générations, en parallèles et reliés par une branche à leurs sommets, voir figure 4.2.1. Chacun des arbres a_1 et a_2 a une résistance qui vaut :

$$R_{a_i} = R'_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{2^p} \frac{1}{(h_2 \times h_3 \times \dots \times h_{p+1})^3} \right]$$

où R'_0 est la résistance de la première génération de chacun des deux sous-arbres a_1 et a_2 (identiques par hypothèse). Si R_0 est la résistance de la première branche de A , la résistance totale de A s'écrit donc :

$$R_{N+1}^{eq} = R_0 + \left(\frac{1}{R_{a_1}} + \frac{1}{R_{a_2}} \right)^{-1} = R_0 + \frac{1}{2} R_{a_i}$$

Compte-tenu du fait que $R'_0 = R_0/h_1^3$, on a :

$$R_{N+1}^{eq} = R_0 + R_0 \frac{1}{2 \times h_1^3} \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{2^p} \frac{1}{(h_2 \times h_3 \times \dots \times h_{p+1})^3} \right] = R_0 \left[1 + \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{2^p} \frac{1}{(h_1 \times h_2 \times \dots \times h_p)^3} \right]$$

Ce qui prouve le résultat par récurrence. \square

Calcul du volume :

En négligeant le volume des intersections, et en considérant qu'à la génération p il y a 2^p branches, et que le volume de chaque branche est $(h_1 \dots h_p)^3 V_0$, on obtient :

Proposition 2 *Le volume d'un arbre de $N + 1$ générations vaut :*

$$V_N = V_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N 2^p (h_1 \times h_2 \times \dots \times h_p)^3 \right] \quad (4.5)$$

Remarques :

La résistance et le volume de l'arbre sont des sommes finies à N termes. Le nombre $2^p(h_1 \times \dots \times h_p)$ apparaît aux dénominateurs de chacun de ces termes pour la résistance et aux numérateurs pour le volume. Cette remarque met dès maintenant en évidence les comportements "opposés" de la résistance et du volume relativement aux facteurs h_1, \dots, h_N . Ainsi, on sent bien que si on cherche à minimiser l'une de ces deux grandeurs, ce sera au dépend de l'autre. Ainsi, ce système cadre bien avec la théorie de l'optimisation avec contrainte.

4.2.2 Optimisation de la résistance à volume fixé : l'arbre optimal est fractal

Dans cette partie, nous allons montrer qu'une "meilleure" structure peut être définie dans le cadre des hypothèses des paragraphes précédents. Cette structure est obtenue en minimisant la dissipation visqueuse dans un arbre fini dont le volume maximal autorisé est borné. Un argument mathématique simple, basé sur le théorème des extréma liés (qui permet l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange), suggère que le meilleur arbre est fractal de dimension fractale 3. Dans un tel arbre, les branches sont des homothéties d'une génération à la suivante d'un facteur h égal à $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} \sim 0.7937$. Cette loi est connue sous le nom de *loi de Hess-Murray*, d'abord formulée par Hess [25] pour les vaisseaux sanguins et développée ensuite par Murray [36].

Fixons le nombre de générations $N + 1$ de notre arbre, les paramètres $h_1, \dots, h_N \in]0, 1[$ sont supposés inconnus. Considérons un réel strictement positif Λ et supposons que cela corresponde au volume maximal que l'arbre puisse utiliser. Quelle est, dans ce cas, la résistance minimale autorisée pour cet arbre ? Dans quelle mesure est-ce que cela définit la géométrie ? La proposition suivante nous donne la réponse :

Proposition 3 *L'application $(h_1, \dots, h_N) \rightarrow R_N^{eq}(h_1, \dots, h_N)$ a un minimum unique sur le domaine défini par $V_N(h_1, \dots, h_N) \leq \Lambda$. Plus précisément ce minimum est atteint sur la surface $V_N(h_1, \dots, h_N) = \Lambda$ au point $((\frac{\Lambda - V_0}{2NV_0})^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, \dots, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}})$.*

Démonstration :

La première étape consiste à effectuer un changement de variable pour simplifier l'écriture du problème. Ainsi, posons $X_p = 2h_1^3 \times 2h_2^3 \times \dots \times 2h_p^3$. Comme $h_p > 0$, le domaine de travail devient $\mathcal{D} = \{(X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{R}_*^+ \mid V_N(X_1, \dots, X_N) \leq \Lambda\}$. On notera $\mathcal{S} = \{(X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{R}_*^+ \mid V_N(X_1, \dots, X_N) = \Lambda\}$. En utilisant ce nouveau système de coordonnées, la résistance et le volume peuvent se réécrire :

$$R_N^{eq} = R_0 \left(1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{X_p} \right)$$

$$V_N = V_0 \left(1 + \sum_{p=1}^N X_p \right)$$

Tout d'abord, la différentielle de R_N^{eq} ne s'annule pas sur \mathcal{D} ($\nabla R_N^{eq} =^t (-\frac{R_0}{X_1^2}, \dots, -\frac{R_0}{X_N^2})$) donc il n'y a pas d'extremum à l'intérieur de \mathcal{D} . Or $\lim_{X_p \rightarrow 0} R_N^{eq} = +\infty$ pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, donc le minimum est atteint sur le "dernier" bord de \mathcal{D} c'est à dire \mathcal{S} .

Maintenant, il reste à trouver les extrema de R_N^{eq} sur \mathcal{S} . Appliquons le théorème des extrema liés : ces extrema sont caractérisés par l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla R_N^{eq} = \lambda \cdot \nabla V_N$ (le gradient est considéré relativement aux N paramètres X_1, \dots, X_N).

$$\begin{aligned} \partial_{X_i} R_N^{eq} &= -R_0/X_i^2 \\ \partial_{X_i} V_N &= V_0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, aux extrema : $X_i^e = \sqrt{-\frac{R_0}{\lambda V_0}}$. En utilisant la contrainte de volume, une équation supplémentaire apparaît : $V_0(1 + \sum_{p=1}^N X_i^e) = \Lambda$, soit $V_0(1 + N\sqrt{-\frac{R_0}{\lambda V_0}}) = \Lambda$. Ce qui permet de déterminer $\lambda = -\frac{N^2 V_0 R_0}{(\Lambda - V_0)^2}$.

On en déduit la valeur de $X_i^e = \frac{1}{N} \frac{\Lambda - V_0}{\sqrt{V_0}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, ce qui prouve en particulier qu'il n'existe qu'un seul extremum atteint. Or on sait que $R_N^{eq}(X_1, \dots, X_N)$ atteint son minimum sur ce sous-ensemble de \mathcal{D} , donc l'extremum trouvé est le minimum global de cette application sur \mathcal{D} .

En retournant aux coordonnées d'origine, on obtient :

$$\begin{aligned} 2h_1^3 &= \frac{1}{N} \frac{\Lambda - V_0}{V_0} \\ 2h_1^3 \times 2h_2^3 &= \frac{1}{N} \frac{\Lambda - V_0}{V_0} \\ 2h_1^3 \times 2h_2^3 \times 2h_3^3 &= \frac{1}{N} \frac{\Lambda - V_0}{V_0} \\ \dots & \end{aligned}$$

Ce qui prouve que le minimum de R_N^{eq} sur $\{(h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}_*^+ \mid V_N(h_1, \dots, h_N) \leq \Lambda\}$ est atteint en

$$\left(\left(\frac{\Lambda - V_0}{2NV_0} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \dots, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

□

On remarquera qu'il est plus valable pour l'arbre d'adapter la taille de ses branches au volume dès la première génération plutôt que de distribuer cette adaptation dans toutes ses branches. Une fois cette adaptation effectuée, la décroissance des tailles devient fractale, avec une dimension fractale égale à $-\ln(2)/\ln((\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}) = 3$: l'arbre remplit au mieux l'espace (si le nombre de générations devient infini, l'arbre remplit effectivement tout l'espace). Ainsi, par extension, une structure reste homogène à petite échelle même si d'importantes dissymétries existent aux échelles plus grandes. En particulier, on voit que si deux systèmes sont optimaux au sens de la proposition 3 alors même en étant de tailles et de géométries différentes, ils auront exactement les mêmes propriétés aux petites échelles. Ce sont en effet les propriétés des petites tailles qui sont déterminantes du point

de vue de la résistance et du volume.

Le poumon vérifie étonnamment bien ces résultats, en particulier il choisit plutôt d'être irrégulier dans ses premières générations pour s'adapter à la géométrie du volume (ainsi qu'à l'inertie de l'air, voir chapitre 3.3.3) puis il devient relativement régulier dans ses générations suivantes, voir paragraphe 4.1.1. Néanmoins, dans le poumon, le facteur de réduction moyen h d'une génération à l'autre, bien qu'étant relativement constant à partir de la sixième génération, n'est pas égal à $\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}} \sim 0.79$. Il est sensiblement plus grand. En effet sur la figure 4.8 où sont représentés les facteurs de réduction des longueurs et des diamètres, on voit que le facteur h est plutôt de l'ordre de 0.85. Ainsi on constate que le poumon n'est pas optimal. Quels en sont les conséquences sur les résistances et volumes ? Que peut bien gagner le poumon a ne pas être optimal ? La réponse à cette question doit encore une fois être cherchée dans la variabilité intrinsèque des systèmes physiologiques.

Remarque :

Bien qu'en dehors du cadre de ce chapitre, il est intéressant de remarquer que l'on peut très facilement généraliser la proposition 3 pour un arbre de $N + 1$ générations branchant de façon p -adique et formé de cylindres n -dimensionnels inclus dans \mathbb{R}^n :

Proposition 4 *L'application $(h_1, \dots, h_N) \rightarrow R_N^{eq}(h_1, \dots, h_N)$ a un minimum unique sur le domaine défini par $V_N(h_1, \dots, h_N) \leq \Lambda$. Plus précisément ce minimum est atteint sur la surface $V_N(h_1, \dots, h_N) = \Lambda$ au point $((\frac{\Lambda - V_0}{pNV_0})^{\frac{1}{n}}, (\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}}, (\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}}, \dots, (\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}})$.*

Sa dimension fractale devient alors $-\ln(p)/\ln((\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}}) = n$ et on voit que l'on remplit toujours l'espace. Toutes les propriétés exposées dans le cadre dichotomique 3D restent valables dans ce cas plus général, en particulier on a toujours l'adaptation de l'arbre au volume dès la première génération.

4.2.3 Ecarts autour de l'arbre optimal, mise en évidence d'une marge de sécurité

Il a été démontré précédemment, en optimisant la résistance d'un arbre symétrique et dichotomique à volume restreint, que la meilleure structure est fractale de dimension fractale 3, voir proposition 3. Plus précisément, les branches d'une génération doivent être une réduction d'un facteur $h_o = \frac{1}{2}^{\frac{1}{3}} \sim 0.79$ des branches de la génération précédente. On observe toutefois que le poumon, bien qu'ayant un facteur de réduction h_p à peu près constant à travers ses générations (il est fractal), n'est pas optimal, comme le montre la figure 4.8, où l'on voit que $h_p \sim 0.85 > h_o \sim 0.79$. Les conséquences sur la résistance et le volume d'un tel décalage peuvent être importantes compte-tenu du caractère multiplicateur des facteurs de réduction dans les expressions de ces deux grandeurs. Cette remarque, associée à la variabilité physiologique et aux incessantes modifications géométriques ayant lieu dans le poumon, pose la question de l'influence de ce facteur de réduction.

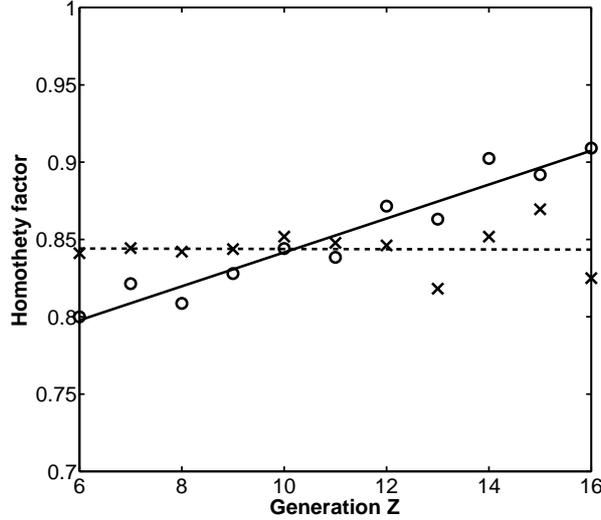


FIG. 4.8 – Facteurs de réduction des longueurs et des diamètres dans les bronches inférieures du poumon humain (générations sept à dix-sept). Ces données sont les mesures effectuées par E.R. Weibel en 1963, voir [61]. Les cercles et les croix représentent respectivement les rapports des diamètres et des longueurs.

Dans cette partie, la géométrie est un arbre dichotomique, symétrique. On suppose de plus que cet arbre est fractal, cela signifie que le facteur de réduction des branches est le même pour toutes les générations, il sera représenté par la lettre h . En général, on considérera un arbre de onze générations, correspondant aux générations sept à dix-sept des poumons. Compte-tenu des données de la figure 4.8, ce modèle est assez réaliste quand h est proche de $h_p = 0.85$. Nous allons chercher à comprendre quelle est précisément l'influence de ce facteur h sur la résistance et le volume. Réécrivons donc leurs expressions avec cette fois-ci l'hypothèse $h_1 = h_2 = \dots = h_N = h$ (voir équations 4.4 et 4.5) :

$$R_N^{eq} = R_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2h^3)^p} \right], \quad V_N = V_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N (2h^3)^p \right]$$

Ce qui s'écrit encore (si $h \neq \frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}$) :

$$R_N^{eq} = R_0 \left[\frac{(2h^3)^{-(N+1)} - 1}{(2h^3)^{-1} - 1} \right], \quad V_N = V_0 \left[\frac{(2h^3)^{N+1} - 1}{(2h^3) - 1} \right]$$

On voit toute suite dans cette dernière expression, que la position du nombre $2h^3$ relativement à 1 va définir le comportement de R_N^{eq} et de V_N . On voit aussi que plus N sera grand, plus cette influence sera importante. Dans la résistance, c'est $\frac{1}{2h^3}$ qui intervient tandis que dans le volume, c'est $2h^3$. Ainsi leurs comportements sont opposés : quand la résistance est grande, le volume occupé est faible mais quand la résistance est faible, le volume occupé est grand. A l'optimal, quand $h = \frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}$, $R_N^{eq} = R_0 \times (N + 1)$ et $V_N = V_0 \times (N + 1)$. La dépendance asymptotique relativement au nombre de génération

$N + 1$ (c'est à dire pour N assez grand) est donc la suivante :

- si $2h^3 < 1$, alors, $R_N^{eq} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} C_1 \times (2h^3)^{-N}$, donc R_N^{eq} tend vers l'infini exponentiellement avec N . V_N est quant à lui borné.
- si $2h^3 > 1$, alors R_N^{eq} est bornée et $V_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} C_2 \times (2h^3)^N$ C'est au tour de V_N de tendre exponentiellement vers l'infini avec N .
- si $2h^3 = 1$, $R_N^{eq} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} R_0 \times N$ et $V_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} V_0 \times N$. Dans ce cas, qui est le cas de l'optimal, les deux grandeurs tendent vers l'infini avec N mais linéairement cette fois, donc beaucoup moins vite que dans les deux autres cas.

Plusieurs points peuvent être mis en évidence : tout d'abord dans le cadre d'arbres infinis, on voit qu'il n'existe pas de cas où le volume et la résistance sont finis, ce résultat peut être généralisé pour des arbres quelconques irriguant un volume, voir [6]. Ensuite, l'optimal pour un arbre, fini cette fois, n'est pas anodin : la position trouvée est celle des variations moindres avec N des deux grandeurs. Enfin le poumon se situe du côté $2h^3 > 1$ donc dans le cas des grands volumes et des petites résistances. Ainsi, il préfère favoriser la respiration plutôt qu'économiser de l'espace. En particulier on voit que sa dimension fractale est bien plus grande que 3 : $-\ln(2)/\ln(h_p) \sim 4.26$. Cela signifie en particulier que le nombre de générations ne peut être trop grand car le volume occupé en trois dimensions est trop important.

Un phénomène important reste toutefois à étudier : que se passe-t-il quand le facteur de réduction varie légèrement ? La figure 4.9 montre les courbes de la résistance et du volume en fonction de h . La courbe continue représente la résistance et la courbe pointillée le volume. On voit que le poumon est du côté des grands volumes et des petites résistances. La forme des courbes est aussi importante : la résistance est très plate du côté $h > h_o$, cela signifie qu'une variation de h a peu de conséquence sur la résistance. Au contraire la même variation de h du côté $h < h_o$ entraîne un grand changement (par exemple, sur la figure 4.9 entre les résistances à $h = 0.85$ et $h = 0.80$ il y a un facteur 2 tandis qu'entre les résistances à $h = 0.78$ et $h = 0.73$ il y a un facteur 4). Pour le volume, c'est exactement le contraire. Ainsi, on peut considérer h_o comme un facteur critique pour la résistance : si $h > h_o$ alors la résistance est peu sensible à h et on est en régime sous-critique, au contraire si $h < h_o$, la résistance est très sensible, le régime est sur-critique. Par conséquent, en se situant en régime sous-critique, le poumon s'octroie une marge de sécurité qui autorise une certaine variation inter-individus. Malgré cette marge, il reste néanmoins remarquablement proche de l'optimal physique.

Outre cette variabilité entre plusieurs individus, le poumon n'est pas une structure rigide et il est le siège de contractions et dilatations incessantes (ne serait-ce que par la respiration ou par la régulation des diamètres des bronches [42]), cette marge de sécurité a donc aussi vocation de permettre ces changements sans trop attenter à l'efficacité du système. Toutefois, des individus dont la marge de sécurité est plus faible pourront être plus fragiles dans certaines conditions, voir le chapitre 4.2.4 sur l'asthme. Ils auront néanmoins un arbre bronchique d'un volume plus faible, ce qui signifie potentiellement

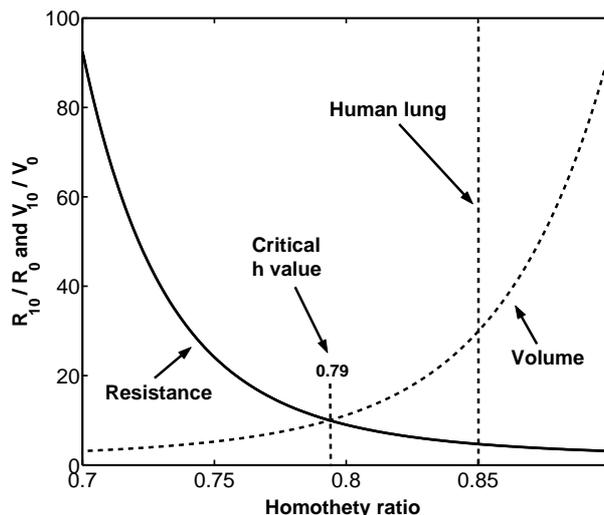


FIG. 4.9 – Dépendance de la résistance et du volume d’un arbre fractal de onze générations en fonction du facteur de réduction des branches h . La résistance et le volume ont été normalisés ($R_0 = 1$ et $V_0 = 1$). À noter les grandes variations des courbes qui montrent l’importante sensibilité du système à sa géométrie. La valeur critique est plus grande que la valeur humaine.

plus de place pour les acinus, et donc plus de surface d’échange : ils seront plus efficaces. On voit alors pourquoi des gens comme les athlètes peuvent être plus sensibles à des maladies comme l’asthme [68].

À noter que la figure 4.8 montre que les facteurs de réduction des diamètres des générations inférieures sont un peu plus grands. Ces générations correspondent aux extrémités de l’arbre bronchique. Les mesures de la figure 4.9, ont été effectuées sur un moulage de poumon. On peut supposer en première approximation qu’elles correspondent à l’état normal du poumon sans influence musculaire (état relâché). Les petites bronches autorisent donc un degré de contraction plus grand avant qu’un stade critique ne soit atteint. En un sens, cela signifie que la marge de sécurité est plus importante pour les bronches les plus petites, ce qui est cohérent étant donné que ce sont celles qui risquent le plus de s’obstruer (*se collaber*).

4.2.4 Branches non homothétiques, application à l’asthme

Le modèle utilisé jusqu’ici considère que les longueurs et diamètres varient de la même façon. Toutefois dans le cas de l’asthme, de la bronchiolite ou de réactions allergiques (par exemple aux pollens), seuls les diamètres intérieurs des bronchioles sont modifiés, voir figure 4.10. Avec ces hypothèses les branches ne sont plus des homothéties d’une génération à l’autre et il convient de découpler les longueurs des diamètres. Dans ce qui suit, h_l représente le rapport des longueurs existant entre deux générations successives et h_d le rapport des diamètres. Ainsi :

Proposition 5 *La résistance d'un arbre de $N + 1$ générations s'écrit*

$$R_N^{eq} = R_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{1}{2^p} \left(\frac{h_l}{h_d^4} \right)^p \right]$$

Le volume s'écrit alors :

$$V_N = V_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N 2^p (h_l h_d^2)^p \right]$$

Démonstration :

Le calcul de la résistance se fait par récurrence, en considérant l'arbre comme deux sous-arbres identiques, reliés entre eux par une branche de résistance R_0 , voir proposition 3. \square

Cette fois-ci on voit que les termes des séries sont différents, les comportements de la résistance et du volume étant respectivement liés à la position relative de $\frac{h_l}{2h_d^4}$ et de $2h_l h_d^2$ vis à vis de 1. Ainsi en supposant connu h_l , le facteur critique h_d^R pour la résistance est $h_d^R = \left(\frac{h_l}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Si $h_d < h_d^R$, la résistance est grande et sensible aux variations et si $h_d > h_d^R$, la résistance est petite et peu sensible. Le facteur critique pour le volume est quant à lui $h_d^V = (2h_l)^{-\frac{1}{2}}$. Si $h_d > h_d^V$ alors le volume est grand et sensible, et si $h_d < h_d^V$ le volume est petit et peu sensible. Sur la figure 4.8, on voit que le rapport des longueurs peut-être supposé constant dans le domaine du poumon considéré dans ce chapitre et égal à 0.85. Avec cette donnée, on trouve $h_d^R \sim 0.81$ et $h_d^V \sim 0.77$. On peut alors résumer les comportements dans un tableau :

		h_d^V		h_d^R	
R_N^{eq}	+	+	+		-
V_N	-		+	+	+

Les signes + représentent les grandes valeurs et la grande sensibilité vis à vis de h_d de la résistance et du volume, tandis que les signes - représentent les petites valeurs et la faible sensibilité. On voit qu'il n'existe pas de configuration intéressante du point de vue du volume et de la résistance. Encore une fois le poumon doit faire un choix entre les deux. Sur la figure 4.8 le rapport des diamètres croît légèrement de 0.82 à 0.9 entre les générations sept et dix-sept : l'arbre bronchique est donc toujours au-dessus des deux facteurs critiques h_d^R et h_d^V : il favorise la résistance tout en conservant une certaine marge de sécurité.

Les effets multiplicateurs sont cette fois associés à une puissance 4 du facteur h_d (contre une puissance 3 du facteur h dans le paragraphe précédent 4.2.3). Cela va créer une sensibilité plus importante du système vis à vis des variations du rapport des diamètres. Pour illustrer cet effet, les résistances de différents arbres de onze générations ont été calculées en fonction de la réduction du facteur h_d . Cette réduction est exprimée en pourcentage

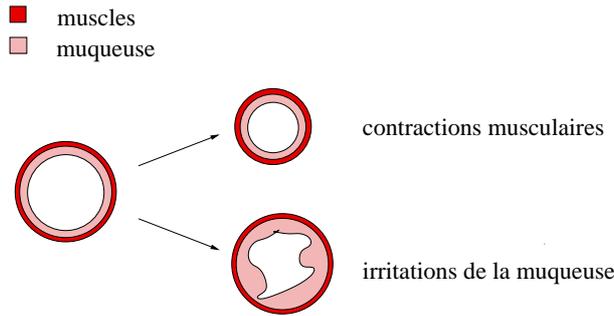


FIG. 4.10 – Exemples de disfonctionnements pouvant entrainer une crise d’asthme. La constriction des bronches peut être à l’origine d’une contraction excessive des muscles lisses sur leur paroi ou bien de l’irritation de la muqueuse qui recouvre leurs surfaces internes (typiquement par effets allergiques). Comme le diamètre efficace des bronches diminue, la respiration devient plus difficile.

de réduction relativement à la valeur initiale de h_d (c’est à dire en remplaçant h_d par $(1 - \frac{x}{100})h_d$ où x est l’abscisse). Les courbes intitulées “human lung” correspondent à des arbres plus réalistes dont les facteurs de réduction du diamètre sont ceux présentés sur la figure 4.8. Ces derniers arbres ont donc des $h_d(z)$ dépendant de la génération z et les courbes présentent leurs comportements quand $h_d(z)$ est réduit en $(1 - \frac{x}{100})h_d(z)$. A noter que les résistances ont été normalisées relativement à leur valeur pour une réduction de 0% (valeur initiale). Les résultats sont exposés sur la figure 4.11. La contraction crée une augmentation dramatique de la résistance totale des arbres : une réduction de 4% du rapport des diamètres double quasiment la résistance de l’arbre intitulé “symmetric human lung” alors qu’elle ne ferait qu’augmenter de 15% la résistance d’un tube seul. Dans le cas de l’arbre critique (symétrique ou pas), le phénomène est amplifié. A noter qu’un arbre dissymétrique se comporte un peu mieux, tout en restant néanmoins très sensible, pour plus de détails sur les arbres dissymétriques, voir le paragraphe suivant 4.3.

Pour conclure, le découplage de la réduction des longueurs et des diamètres permet de modéliser assez correctement l’effet sur les résistances de la contraction des bronches. Néanmoins, notre modèle suppose une contraction homogène du sous-arbre, ce qui n’est pas toujours le cas dans les maladies comme l’asthme. En effet un certain nombre de phénomènes ne sont pas ici considérés, comme la fermeture des bronches, qui stoppe complètement le flux dans une partie entière du poumon, ou comme des contractions dispersées et locales dans l’arbre bronchique. Toutefois, dans les cas où nos résultats s’appliquent, on voit que le “design” des poumons est important, en ce sens qu’il rend un individu plus ou moins sensible aux aléas respiratoires. Ainsi, un arbre dont le facteur de réduction des branches est proche de l’optimal sera plus fragile vis à vis des contractions des bronches. A noter que le poumon augmente petit à petit son facteur de réduction des diamètres en descendant dans les générations. Cela améliore sa réponse aux contractions. En effet, dans le cas où le facteur d’homothétie passe en dessous de la valeur critique, la plus grande partie de la résistance se trouve à la base de l’arbre bronchique. Ce phénomène provient du fait que dans l’expression de la résistance une formule du type $\sum_p a^p$ apparaît (avec $a = \frac{h_l}{2h_d^4}$) où p représente la génération. Si a devient plus grand que 1, ce sont donc

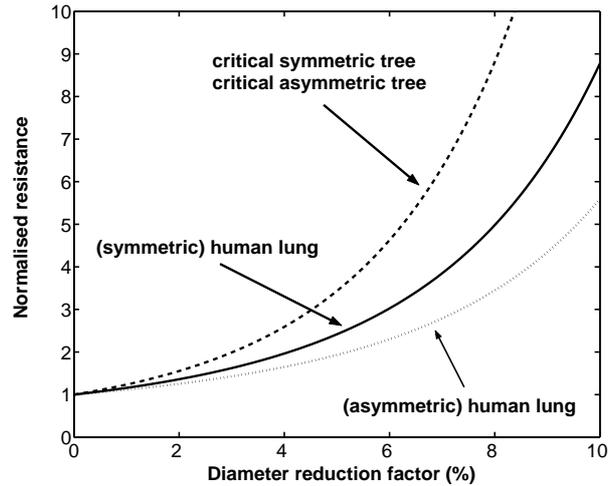


FIG. 4.11 – Dépendance de la résistance en fonction de la contraction des bronches, exprimée en pourcentage de réduction du facteur d’homothétie des diamètres (abscisse). L’ordonnée correspond à la résistance normalisée de l’arbre relativement à sa valeur sans contraction (c’est à dire que la résistance vaut 1 pour une contraction valant 0%). Les trois courbes montrent la sensibilité de quatre différents arbres : la ligne avec des tirets correspond aux arbres critiques (symétrique avec $h = 0.79$ et dissymétrique avec $h = 0.76$). La ligne pleine correspond à un arbre symétrique dont les facteurs de réduction h_l et h_d sont ceux des données de Weibel pour le poumon humain [61]. Ces données sont présentées sur la figure 4.8 ; Dans ce cas, une réduction de 4% du diamètre double la résistance. La ligne pointillée correspond à un arbre dissymétrique dont le facteur d’homothétie moyen est $h = 0.85$. Le système dissymétrique est légèrement moins sensible à la réduction des diamètres, mais une réduction de 5% suffit néanmoins à doubler la résistance.

les termes a^p avec les plus grands p qui définissent l'ordre de grandeur de la somme.

4.3 Cas d'un arbre asymétrique

Bien que l'hypothèse de régularité des branchements soit a priori assez bonne pour appliquer les résultats précédents aux poumons, il peut être intéressant et plus précis d'étudier le comportement de ce modèle dans le cas d'un arbre dissymétrique. Le poumon est en effet une structure dont la variabilité reste assez importante [60, 30] (par exemple au cours de la respiration, ou encore sous l'influence des muscles lisses sur les parois des bronches). Le résultat présenté ci-dessous nous dit que l'hypothèse de branchement symétrique n'est pas nécessaire à l'obtention d'un optimal critique. C'est avant tout l'effet multiplicateur qui est à l'origine de l'extrême sensibilité du système. Pour illustrer ce fait, on peut calculer la résistance dans le cas où les tubes branchent de façon dissymétrique : les deux branches filles sont des réductions de rapport h_1 et h_2 de leur branche mère. La répartition de ces rapports lors d'un branchement est fait aléatoirement.

Proposition 6 *La résistance d'un tel arbre de $N + 1$ générations s'écrit :*

$$R_N = R_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N \left(\frac{1}{h_1^3 + h_2^3} \right)^p \right]$$

Quant à son volume, il vaut :

$$V_N = V_0 \left[1 + \sum_{p=1}^N (h_1^3 + h_2^3)^p \right]$$

Démonstration :

Les calculs de la résistance et du volume se font par récurrence, par découpage de l'arbre en deux parties comme pour la proposition 3. \square

En particulier on voit que toutes les distributions de h_1 et h_2 dans l'arbre sont équivalentes du point de vue de la résistance et du volume. Bien qu'aléatoires, tous ces arbres sont composés des mêmes successions de branches, les différences étant juste leur organisation. Or comme nous travaillons en régime lent, cette orientation n'influe pas sur la résistance (non plus que sur le volume, bien-entendu). La sensibilité du système est maintenant définie par la position de $(h_1^3 + h_2^3)$ relativement à 1.

Donnons un exemple précis. Nous avons calculé l'effet de bifurcations non symétriques dans un arbre avec des rapports h_1 et h_2 définis relativement à un paramètre moyen h . L'une des deux branches filles voit sa taille multipliée par un facteur $h_1 = 1.2h$ tandis que l'autre est multipliée par $h_2 = 0.8h$. A chaque bifurcation, les branches filles ont donc des résistances différentes, dont le rapport est $(h_1/h_2)^3 \sim 3.38$. Ainsi on peut déterminer un facteur critique h_c pour h par

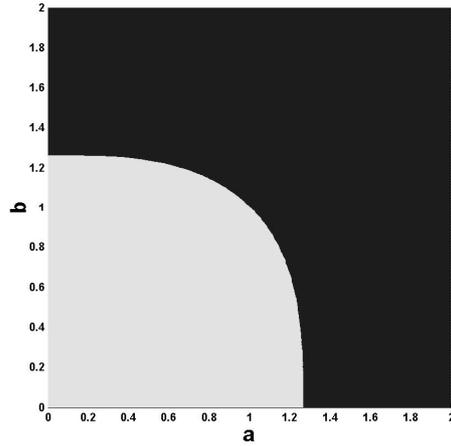


FIG. 4.12 – Domaines définissant l’influence de l’asymétrie sur la résistance. L’interface entre les deux régions correspond à la courbe $a^3 + b^3 = 2$. Un choix de couple (a, b) dans la zone grise donne une résistance plus grande pour l’arbre dissymétrique que pour l’arbre symétrique. Au contraire, un choix dans la zone noire donne une résistance plus petite à l’arbre asymétrique. L’exemple présenté dans ce chapitre, $a = 1.2$ et $b = 0.8$ se situe dans la zone noire car $1.2^3 + 0.8^3 = 2.24 > 2$, donc $R_s > R_d(1.2, 0.8)$.

$$\frac{1}{h_c^3(1.2^3 + 0.8^3)} = 1$$

On trouve $h_c = 0.76$. On voit donc qu’un tel arbre a un facteur critique plus petit qu’un arbre symétrique où $h_c = 0.79$. Ce résultat signifie que la diminution de la résistance obtenue par l’augmentation de la taille de certaines branches (celles réduites d’un facteur h_2) est plus important que l’augmentation de résistance induite par la réduction d’un certain nombre de branches (celles réduites de h_2). Ce phénomène est dû au choix des deux valeurs 1.2 et 0.8 (voir ci-dessous).

Comme le montre la figure 4.11, cet arbre reste très sensible à la contraction des bronches, même s’il l’est un peu moins que les arbres symétriques. En effet la criticalité réside dans la structure arborescente et non pas dans la condition de symétrie. Il est intéressant de noter que les arbres critiques dissymétrique et symétrique ont exactement le même comportement (voir figure 4.11). On peut donc en déduire pour les autres mammifères dont les poumons ont des degrés d’asymétrie plus importants (comme le chien), que ce phénomène est tout aussi présent que chez l’Homme.

Dans un cadre un peu plus général, supposons que l’on choisisse des facteurs de réduction h_1 et h_2 de la façon suivante : $h_1 = a \times h$ et $h_2 = b \times h$. Alors la résistance normalisée R_d de l’arbre dissymétrique correspondant s’écrit (arbre de $N + 1$ générations avec $R_0 = 1$) :

$$R_d(a, b) = \sum_{p=0}^N \left(\frac{1}{h^3 \times (a^3 + b^3)} \right)^p$$

Ainsi, la valeur critique de cet arbre est $h_c = \left(\frac{1}{a^3+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$. Si on compare la formule $R_d(a, b)$ à la résistance normalisée R_s de l'arbre symétrique associé au même facteur h ,

$$R_s = \sum_{p=0}^N \left(\frac{1}{2h^3}\right)^p$$

on voit que le comportement de ces deux résistances l'une par rapport à l'autre dépend de la position relative des termes des séries, c'est à dire $\frac{1}{2h^3}$ et $\frac{1}{h^3 \times (a^3+b^3)}$. Finalement, c'est le signe de $(a^3 + b^3) - 2$ qui détermine si la résistance de l'arbre asymétrique est plus ou moins grande que celle de l'arbre symétrique. Sur la figure 4.12 sont représentés les deux domaines définissant ces comportements avec a en abscisse et b en ordonnée. La zone grise correspond à $R_s < R_d$, la zone noire correspond à $R_s > R_d$. En particulier, cela montre que la dissymétrie n'est pas a priori meilleure que la symétrie en ce qui concerne la criticalité. On voit aussi que plus on se rapproche de l'origine, plus le facteur critique $h_c = \left(\frac{1}{a^3+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$, devient grand. Des contraintes supplémentaires, comme par exemple $a + b = 1$, peuvent toutefois être suffisantes pour toujours obtenir des arbres dissymétriques moins résistifs que l'arbre symétrique. En ce qui concerne les volumes, les phénomènes sont inversés : si on note V_s et V_d les volumes respectifs des arbres symétriques et dissymétriques, alors la région grise correspond à $V_s > V_d$ et la noire à $V_s < V_d$.

4.4 Conclusions

Nous avons montré que le système optimal était dangereusement sensible aux fluctuations ou à la variabilité physiologique inter-individus : l'optimalité ne peut donc être le seul critère pour la construction de l'arbre bronchique. La morphologie de l'arbre bronchique humain reste néanmoins proche de l'efficacité maximale (en ce sens qu'elle assure la distribution de l'air avec une dissipation visqueuse minimale). Les bronches étant légèrement plus grandes que l'optimal, elles occupent un volume plus important qu'il n'est forcément nécessaire. Cela permet au système de disposer d'une marge de sécurité vis à vis de la résistance, au prix d'un espace-mort plus important. Dans le poumon humain, le volume des bronches qui n'ont pour rôle que la conduction de l'air est environ 3% du volume total des poumons, c'est du même ordre que l'arbre veineux ou que l'arbre artériel relativement au volume du corps humain. Les 90% restant sont occupés par les acinus où les échanges gazeux ont lieu. Ces acinus sont eux-mêmes constitués d'une surface de type fractal (voir chapitre 5) qui remplit le volume autour des bronches (correspondant à l'espace-mort du poumon) et cela fournit la surface d'échange nécessaire entre l'air et le sang [44].

De la grande sensibilité du système bronchique à la morphologie, on peut déduire une conclusion plus générale. D'un point de vue purement physique, de petites différences entre les individus peut induire des changements importants en ce qui concerne les performances respiratoires. Cela pourrait expliquer pourquoi certains athlètes sont particulièrement sensibles aux effets de l'asthme ou du bronchospasme induit par l'exercice [68] (*exercise-induced bronchospasm* en anglais). Les performances importantes des athlètes, obtenues par l'entraînement, qui augmente la capacité d'oxygénation des muscles

[63, 62, 27], nécessitent une ventilation plus rapide. Cela assure alors un apport en oxygène suffisant, mais l'exercice ne permet pas d'accompagner cette ventilation par un ajustement proportionnel de la structure du poumon. La ventilation la plus importante doit donc être obtenue dans un arbre bronchique construit de telle sorte que la géométrie des bronches peut devenir critique. Le rétrécissement des petites bronches dû à l'exercice résulte en une diminution du facteur de réduction des diamètres, ce qui implique une augmentation aigue de la résistance au flux. Cela serait d'autant plus grave si le facteur d'homothétie des bronches à l'état relâché était proche de la valeur critique 0.79. En effet, les athlètes, toujours à leurs limites, pourraient ne pas avoir de réserves suffisantes pour augmenter le travail qu'ils fournissent déjà pour respirer. Le fait qu'ils soient capables de hautes performances en dépit de leur bronchospasme, pourrait indiquer que le facteur d'homothétie de leur poumon a une marge de sécurité suffisante pour permettre une bonne ventilation de leurs échangeurs pulmonaires. Une structure "plus optimale" serait en effet dangereuse.

Ces résultats peuvent être transposés au sang. Le Professeur E.R. Weibel travaille sur les conséquences du facteur d'homothétie sur les vaisseaux sanguins. Contrairement à l'arbre bronchique, le facteur moyen de réduction des vaisseaux est de l'ordre de 0.77, c'est à dire en-dessous du facteur critique $h_o = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sim 0.79$. Cela signifie que la résistance est très sensible aux variations géométriques et que le volume des vaisseaux est assez faible. Il faut savoir que le réseau sanguin doit être très finement et très facilement réglable. Ainsi, par cet effet de sensibilité, ce but peut être atteint relativement aisément et à coût assez réduit. En ce qui concerne le volume, le fait qu'il ne soit pas trop grand évite au corps humain une présence trop importante de sang, produit considéré comme "coûteux". De plus, on voit que le réseau sanguin est beaucoup plus proche de l'optimal que ne l'est le poumon, ce qui accroît l'efficacité globale du système pour distribuer le sang tout en conservant un volume raisonnable.

Enfin, ces résultats remettent en question les récentes preuves sur les origines des lois allométriques [66]. En effet, les raisonnements actuels s'appuient sur l'hypothèse que les êtres vivants fonctionnent toujours à l'optimal physique, particulièrement en ce qui concerne la dissipation visqueuse des fluides circulant en leur sein. Cette hypothèse est donc contredite par les résultats de ce chapitre. De plus le travail de thèse de Maddalena Felici [19] a montré que les acinus ne fonctionnent pas à leur maximum au repos et qu'ils conservent une marge de sécurité sous la forme d'une réserve de surface d'échange, disponible, par exemple, pour l'exercice. On voit donc que pour expliquer les lois allométriques, il faut nécessairement faire intervenir ce principe de marges de sécurité, très important pour les systèmes vivants.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans *Nature*, les références de ce papier sont :

An optimal bronchial tree may be dangerous.

B. Mauroy¹, M. Filoche^{1,2}, E. R. Weibel³, and B. Sapoval^{1,2}.

Nature, **427**, 633-636, 12 Février 2004.

¹ Centre de Mathématiques et de leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 94235 Cachan, France.

² Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, C.N.R.S. Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

³ Department of Anatomy, University of Bern, CH-3000 Bern, Switzerland.

Chapitre 5

Flux dans l'acinus (générations 18 à 23)

Dans les chapitres précédents, les deux régions du poumon qui ont été étudiées sont des zones où l'air ne fait que circuler. Une fois à la dix-huitième génération, le fluide arrive dans les acinus. A ce niveau, la structure des branches change, en particulier leur diamètre ne diminue plus [63]. Sur la surface des bronches apparaissent des petits sacs dans lesquels les échanges entre le gaz et le sang ont lieu : les alvéoles. Les conduits alvéolaires, à partir de la vingtième génération, en sont complètement recouverts. Le gaz circule dans cette structure avec une vitesse très faible, si réduite que le mouvement de l'oxygène et du dioxyde de carbone est dominé par le phénomène de diffusion (déplacement des molécules qui tend à homogénéiser les concentrations) [43, 44, 45]. M. Felici, dans le cadre de sa thèse a étudié les propriétés de diffusion de l'oxygène et du dioxyde de carbone dans des modèles réalistes mais fixes d'acinus [19, 20, 21]. Les résultats ont montré que les acinus ne fonctionnent pas de façon homogène. En général l'entrée travaille plus que les extrémités, en particulier au repos : il subissent un effet d'*écrantage* (ou *screening* en anglais) qui assure au système une marge de sécurité (voir sujet connexe sur les marges chez les êtres vivants, chapitre 4). Dans ce travail, les mouvements de l'air et de la structure ont été négligés. Or, les sources de diffusion de l'oxygène et du dioxyde de carbone ne se situent pas toujours au même niveau de la structure, en effet leurs positions se déplacent au cours de la respiration et dépendent du régime respiratoire. Le positionnement de ces sources est lié au rapport des vitesses locales du fluide sur les vitesses de diffusion dans l'air (grandeur mesurée par le *nombre de Pécelet acinaire* dans les arbres symétriques [44]). C'est le problème de la transition convection-diffusion.

La connaissance des flux au cours du temps dans les acinus permettrait une amélioration de ce modèle, en ce sens que l'on saura placer précisément les sources de diffusion tout au long du cycle respiratoire. Dans ce chapitre sont développés les outils nécessaires au calcul des flux dans un modèle d'acinus bidimensionnel [31]. Quelques résultats, très préliminaires, sur la transition convection-diffusion sont aussi présentés.

La simulation des flux a été effectuée numériquement dans des modèles de sous-acinus (trois dernières générations), par programmation directe d'un code d'éléments finis instationnaire 2D en géométrie variable. Ce code utilise les éléments finis de Whitney couplés

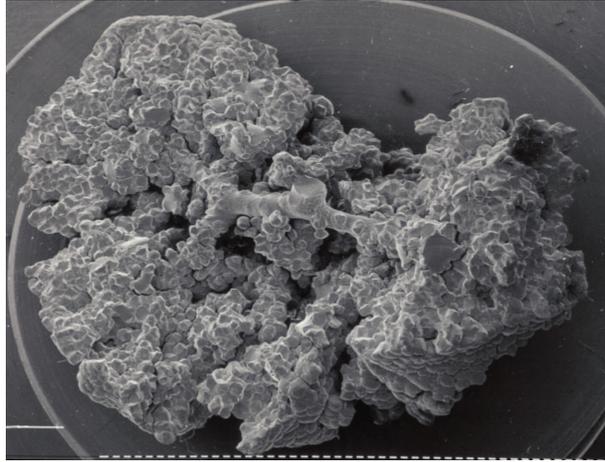


FIG. 5.1 – Acinus. Les conduits alvéolaires sont recouverts par les petits sacs que sont les alvéoles.

à une remontée des courbes caractéristiques permettant de traiter les termes temporels. La vitesse est approchée par des éléments finis P^1 , la pression est quant à elle P^0 . La programmation a été effectuée en partie avec Matlab et en partie en $C++$.

5.1 Modélisation d'un acinus respirant

5.1.1 Hypothèses

Généralités

La circulation de l'air dans la géométrie étant très lente, le problème est régi par les équations de Stokes. Ainsi les propriétés du fluide seront assez homogènes (voir les considérations sur le flux de Poiseuille, paragraphe 4.1.2). A ce régime, un modèle en deux dimensions est donc suffisant en première approximation pour comprendre les mécanismes entrant en jeu. Le fluide remplit l'espace en trois dimensions de façon aussi régulière que l'espace en deux dimensions. Cette simplification est justifiée pour la diffusion dans la référence [19]. A noter que cette hypothèse est fautive en présence d'effets d'inertie, car le fluide utilise tout l'espace nécessaire pour "s'échapper", et les directions disponibles sont plus nombreuses en 3D. Ainsi le flux secondaire observé au chapitre 3.2 n'existe pas en deux dimensions, voir [2] et [34].

Ensuite, nous avons supposé que les phénomènes de diffusion n'influencent pas le flux, ce qui est raisonnable car la proportion d'oxygène absorbée et de dioxyde de carbone rejetée est suffisamment faible pour que les propriétés du fluide (la densité et la viscosité) soient considérées constantes pendant tout le cycle. Ainsi, le calcul des flux peut être effectué indépendamment des phénomènes de diffusion, ce qui justifie les travaux de ce chapitre, traitant seulement la partie hydrodynamique du problème de l'acinus.

L'étape suivante de l'étude, non réalisée à l'écriture de ce manuscrit, serait de résoudre

les équations de diffusion de l'oxygène et du dioxyde de carbone dans le champ de vitesses obtenu, selon l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \cdot \nabla C - D \Delta C = 0$$

où C est la concentration de l'espèce considérée D son coefficient de diffusion dans l'air et v le champ des vitesses de l'air. Les conditions de bord seraient des conditions de Fourier. Ces conditions correspondent à un flux à travers la paroi de molécules d'oxygène (ou de dioxyde de carbone) proportionnel à leur concentration :

$$\frac{\partial C}{\partial n} = KP$$

K est une constante dépendant de la perméabilité de la paroi et du coefficient de diffusion D de l'espèce considérée [19].

Géométrie

La géométrie utilisée provient d'un algorithme réalisé par H. Kitaoka [31]. Cet algorithme qui fonctionne en deux ou trois dimensions remplit complètement un volume de façon itérative par des cellules représentant des sections de conduits alvéolaires. Les chemins créés ont la particularité de n'avoir aucun rebroussement. Cet algorithme n'est pas déterministe et différentes réalisations du modèle peuvent être obtenues pour un même volume. Des propriétés statistiques comme la longueur moyenne des chemins ou la surface totale interne sont conservées. Dans ce chapitre, cet algorithme sera utilisé pour modéliser un sous-acinus (correspondant aux trois dernières générations du poumon, de vingt-et-un à vingt-trois), mais cette hypothèse n'est pas réductrice, la simulation dans tout un acinus étant envisageable. Chaque cellule est un cube de 0.5 mm de côté (cela correspond à l'état de dilatation maximum d'un conduit alvéolaire). En particulier, l'entrée de la structure mesure un demi millimètre. La figure 5.2 montre une réalisation en deux dimensions de cet algorithme avec 6×6 cellules, correspondant à un sous-acinus. Cette géométrie est celle utilisée tout au long de ce chapitre. On notera que le côté "anguleux" de ce modèle n'est pas réellement un problème étant donné que les flux qui circulent à l'intérieur sont très lents et donc peu influencés par ce type de défaut. L'entrée de la structure est représentée en gris en bas à gauche. Il faut toutefois faire remarquer un défaut de ce modèle : certaines branches sont très longues car des branchements s'effectuent très tôt, en particulier le chemin longeant le bord gauche vers le haut puis le bord haut vers la droite est peu réaliste. Pour plus d'informations sur ce modèle voir [31, 19].

Respiration

Pour obtenir un flux dans cette structure, on doit imposer un mouvement cyclique à la géométrie au cours du temps. Bien que la respiration soit dissymétrique en temps, voir chapitre 2.2 et 3.3.3, nous allons considérer ici un modèle sinusoïdal homothétique de respiration. Ainsi au temps t , la géométrie sera homothétique à celle au temps 0 d'un facteur $k(t)$ égal à

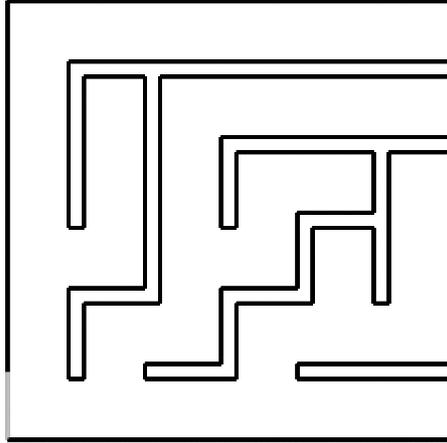


FIG. 5.2 – Modèle 2D de sous-acinus utilisé dans ce chapitre. Il est construit à partir de 6×6 cellules qui forment des chemins branchant en trois générations, sans rebroussement. Chaque région du carré est accessible par un chemin. Chaque cellule est un carré de côté 0.5 mm . Le segment gris correspond à l'entrée de la structure.

$$k(t) = 1 + A \times \left[\frac{1 - \cos(\omega t)}{2} \right]$$

où A est une constante donnant l'amplitude du mouvement et ω sa fréquence. La respiration durant à peu près cinq secondes, ω a été fixé à $\frac{2\pi}{5}$. Quand à l'amplitude A elle reflète la différence des volumes entre l'inspiration et l'expiration. Comme nous travaillons en deux dimensions, le volume est ici une surface et le rapport r des volumes maximum et minimum de la structure vaut donc $\frac{k_{max}^2}{k_{min}^2}$, c'est à dire :

$$r = (1 + A)^2$$

A titre indicatif, supposons une différence de l'ordre de 10% entre les volumes maximum et minimum du poumon au repos. Dans ce cas, le rapport r vaut 1.1, A est alors égal à 0.05. A noter que le diamètre d'entrée de 0.5 mm correspond à un sous-acinus gonflé au maximum, c'est à dire en condition d'exercice. En considérant que le volume d'air absorbé en exercice est le double du volume d'air absorbé au repos, on peut estimer que le diamètre d'entrée maximum au repos est de l'ordre de 0.35 mm , ce qui donne 0.33 mm pour un acinus dégonflé au repos. Les vitesses observées à l'entrée du sous-acinus dans ces hypothèses dans les simulations qui vont suivre sont de l'ordre de 0.1 cm.s^{-1} , cela correspond bien à une vitesse en régime de repos [63].

5.1.2 Domaine : définitions & conditions de bord

Quelques définitions

Notons Ω_t le domaine (ouvert) représentant l'acinus au temps t et $\partial\Omega_t$ son bord. On pose $\Omega = \Omega_0$ (Ω est donc le domaine intérieur de la structure présentée figure 5.2). Pour l'instant, nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général en considérant que

le cycle respiratoire est modélisé par une succession d'homothéties du domaine Ω , dont les rapports varient continument avec le temps selon une fonction $t \rightarrow k(t)$. Le centre de ces homothéties est l'origine $(0, 0)$, que l'on place à l'entrée de la structure. Ainsi, cela signifie que, pour tout temps t :

$$\Omega_t = k(t).\Omega$$

On supposera de plus que la fonction k a les propriétés suivantes :

- La position initiale correspond à une homothétie de rapport 1, ainsi $k(0) = 1$.
- La fonction k est toujours strictement positive.
- La respiration est périodique, c'est à dire il existe T tel que $k(t + T) = k(t)$ pour tout t (en pratique $P = 5$ s).
- La fonction k est une fonction dérivable de dérivée continue.

On fixe un temps $T_m > 0$, correspondant au temps maximal considéré dans notre étude et on note $Q =]0, T_m[\times \Omega$ et $Q' = \bigcup_{t \in]0, T_m[} \{t\} \times \Omega_t$.

Conditions au bords

Les mouvement de l'air est géré par les équation de Stokes, on doit donc imposer les conditions aux bords des domaines Ω_t . Ce bord se décompose en deux parties : la partie correspondant à une paroi que l'on notera en général Γ_t^2 (en noir sur la figure 5.2; on notera $\Gamma^2 = \Gamma_0^2$) et la partie correspondant à l'entrée dans la structure que l'on notera Γ_t^1 (en gris sur la figure; on notera $\Gamma^1 = \Gamma_0^1$). Le mouvement des points de la paroi durant le "cycle respiratoire" impose les vitesses du fluide, étant donné l'hypothèse de non-glissement (conditions de Dirichlet). Ainsi, les conditions de bord de paroi sont données par les vitesses de déplacement des points de la surface. Le mouvement de Γ_t^2 crée un flux qui par conservation à travers le bord de Ω doit s'échapper par l'entrée Γ_t^1 , voir paragraphe 4.1.2. Dans un souci de simplification, nous imposerons à l'entrée un flux opposé à celui créé par la dilatation du reste du bord.

Il s'agit maintenant de calculer la vitesse des points de la paroi. Soit $M(t)$ un point du bord au temps t . Comme le déplacement est une homothétie de centre fixé à l'origine, il existe M_0 tel que

$$M(t) = k(t).M_0$$

donc la vitesse au temps t du point $M(t)$ est

$$v(t, M(t)) = k'(t).M_0 = \frac{k'(t)}{k(t)}.M(t)$$

Ainsi, pour $X \in \Gamma_t^2$ (X point de la paroi), on peut définir la fonction des vitesses du bord u_b par

$$u_b(t, X) = \frac{k'(t)}{k(t)}.X$$

Les conditions de bord à l'entrée doivent compenser le flux créé par le déplacement des points de la paroi. On prolonge donc $u_b(t, \cdot)$ sur Γ_t^1 de telle sorte que :

$$\int_{\Gamma_t^1} u_b(t, X) \cdot \vec{n} = - \int_{\Gamma_t^2} u_b(t, X) \cdot \vec{n}$$

Cette relation définit donc le flux de u_b à travers l'entrée Γ_t^1 . Il reste à choisir son profil. Etant donné que l'on est en régime lent et que le flux est censé provenir d'une bronchiole, on peut le représenter raisonnablement par le régime de Poiseuille : nous allons donc supposer que u_b a un profil parabolique sur Γ_t^1 .

5.1.3 Equations de Stokes en domaine variable - référentiel dépendant du temps

Le flux est modélisé par les équations de Stokes dépendant du temps, valables sur un domaine lui aussi dépendant du temps. A priori, on ne sait pas travailler sur ce type de problème, et on doit utiliser une façon détournée pour faire disparaître le mouvement de la géométrie. On utilise pour cela un changement de variable permettant de réécrire les équations dans un référentiel où temps et espace sont liés, mais où la géométrie reste fixe.

On cherche donc à résoudre le système d'équations suivant dans le système de coordonnées $X = (x_1, x_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla P = 0 & \text{sur } Q' \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{sur } Q' \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega_0 \\ u(t, X) = u_b(t, X) & \text{sur } \partial\Omega_t \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Pour rappel, à chaque temps t , $\partial\Omega_t$ est divisé en deux ensembles Γ_t^1 et Γ_t^2 . Γ_t^1 correspond à l'entrée dans la structure et Γ_t^2 représente la paroi. De plus, comme la dilatation au cours du temps est la conséquence d'homothéties, on sait que $\Gamma_t^i = k(t) \cdot \Gamma_0^i = k(t) \cdot \Gamma^i$ pour $i = 1, 2$.

On effectue le changement de variable $X = k(t) \cdot Y$, le système 5.1 se réécrit en un système d'équations 5.2. Leur domaine spatial est alors Ω et est fixe dans le temps. Ainsi, on obtient dans le nouveau système de coordonnées Y :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [Y \cdot \nabla u] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u + \frac{1}{k(t)} \nabla P = 0 & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{sur } Q \\ u(0, Y) = u_0(k(0) \cdot Y) & \text{sur } \Omega \\ u = u_b(t, k(t) \cdot Y) = \begin{cases} k'(t) \cdot Y & \text{sur } \Gamma^2 \\ b(t, Y) & \text{sur } \Gamma^1 \end{cases} & \end{array} \right. \quad (5.2)$$

où $b(t, \cdot)$ est une fonction de Γ^1 dans \mathbb{R}^2 qui doit compenser le flux créé sur Γ^2 (conséquence de $\operatorname{div}(u) = 0$), il est donc nécessaire d'avoir :

$$\int_{\Gamma^1} b(t, Y) \cdot n + \int_{\Gamma^2} k'(t)(Y \cdot n) = 0$$

Le nouveau système d'équations 5.2 a des propriétés très proches des équations de Stokes. On voit qu'en multipliant sa première équation par $k(t)$, on obtient une équation ayant les propriétés suivantes :

- L'équation correspond à la circulation d'un fluide équivalent quasi-statique ayant une densité $k(t)\rho$ et une viscosité $\mu/k(t)$.
- Le terme $-k'(t)[Y \cdot \nabla u]$ signifie qu'au point Y ce fluide est transporté avec une vitesse $-k'(t) \cdot Y$, qui correspond à la vitesse de déplacement des homothéties au temps t .

L'existence d'une solution à cette équation se démontre par la méthode classique de Galerkin [50]. Compte-tenu du fait que k est toujours strictement positive, la principale différence dans la preuve pour les équations 5.2 et les équations de Stokes est la majoration du terme supplémentaire $\int_{\Omega} X \cdot \nabla u \cdot v$. Les démonstrations de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution sont traitées dans l'annexe B.

5.2 Résultats

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats obtenus par simulation numérique des équations ci-dessus. La partie technique des simulations est décrite dans les derniers chapitres 5.4 et 5.5. La dernière section de ce chapitre présente une alternative à la méthode du changement de variable, cette méthode concurrente est dite de pénalisation. A l'écriture de ce manuscrit, la programmation de cette seconde méthode n'est pas terminée. Ainsi, seule la théorie est présentée. A terme, une comparaison entre ces deux techniques est prévue.

La figure 5.3 montre les flux obtenus avec les hypothèse définies en 5.1.1. Le flux se divise dans les branches, avec des vitesses plus importantes près de l'entrée, et plus particulièrement à mi-inspiration et mi-expiration (en fait quand $k'(t)$ est maximum). L'amplitude des vitesses observées correspond aux ordres de grandeurs mesurés par le

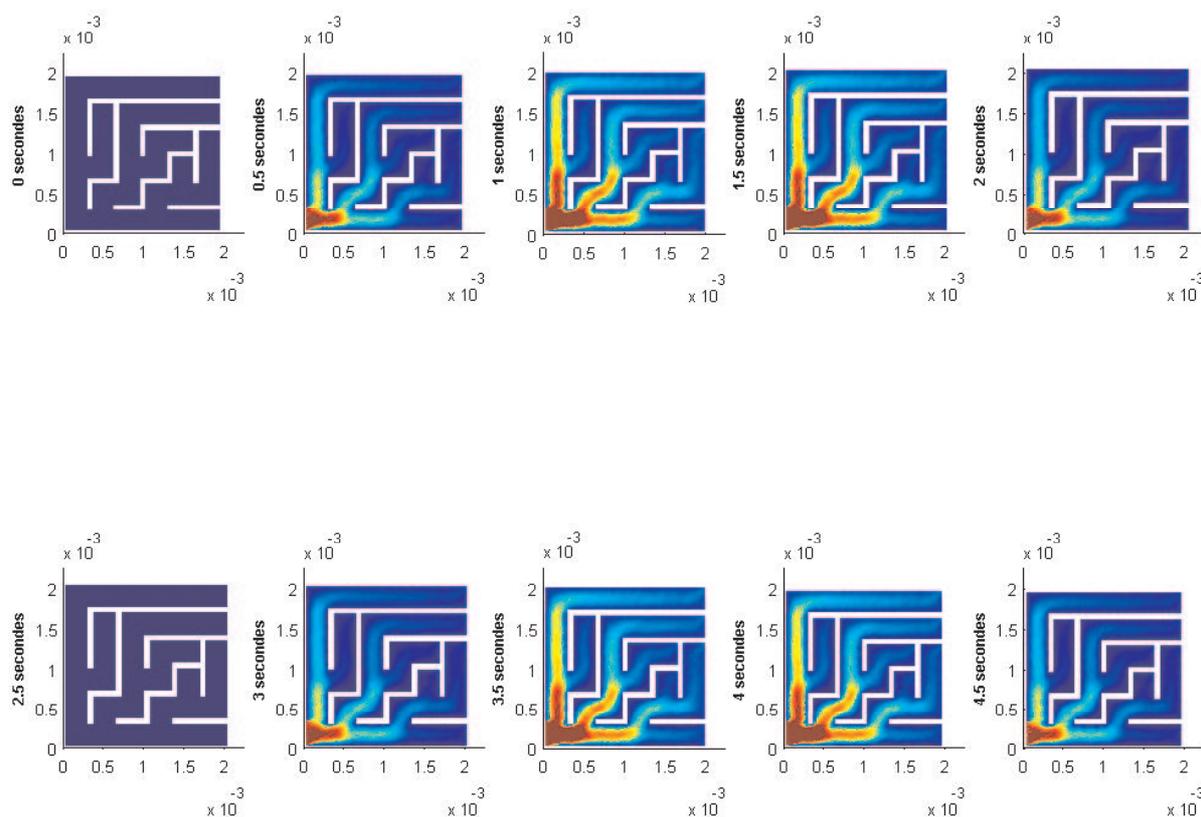


FIG. 5.3 – Amplitudes des flux durant un cycle, les flux sont calculés dans le modèle 2D de H. Kitaoka. La géométrie inspire des temps 0 s au temps 2.5 s (en haut) et expire des temps 2.5 s au temps 5 s (en bas). Les vitesses croissent dans l'ordre de couleurs bleu, jaune et rouge. Le rouge foncé correspond à une vitesse supérieure à 0.4 mm.s^{-1} , la vitesse maximum au cours du cycle est de l'ordre de 1 mm.s^{-1} , le bleu foncé correspond quant à lui à des vitesses nulles. Le flux se divise entre les différentes branches, et plus la génération est profonde plus la vitesse est faible.

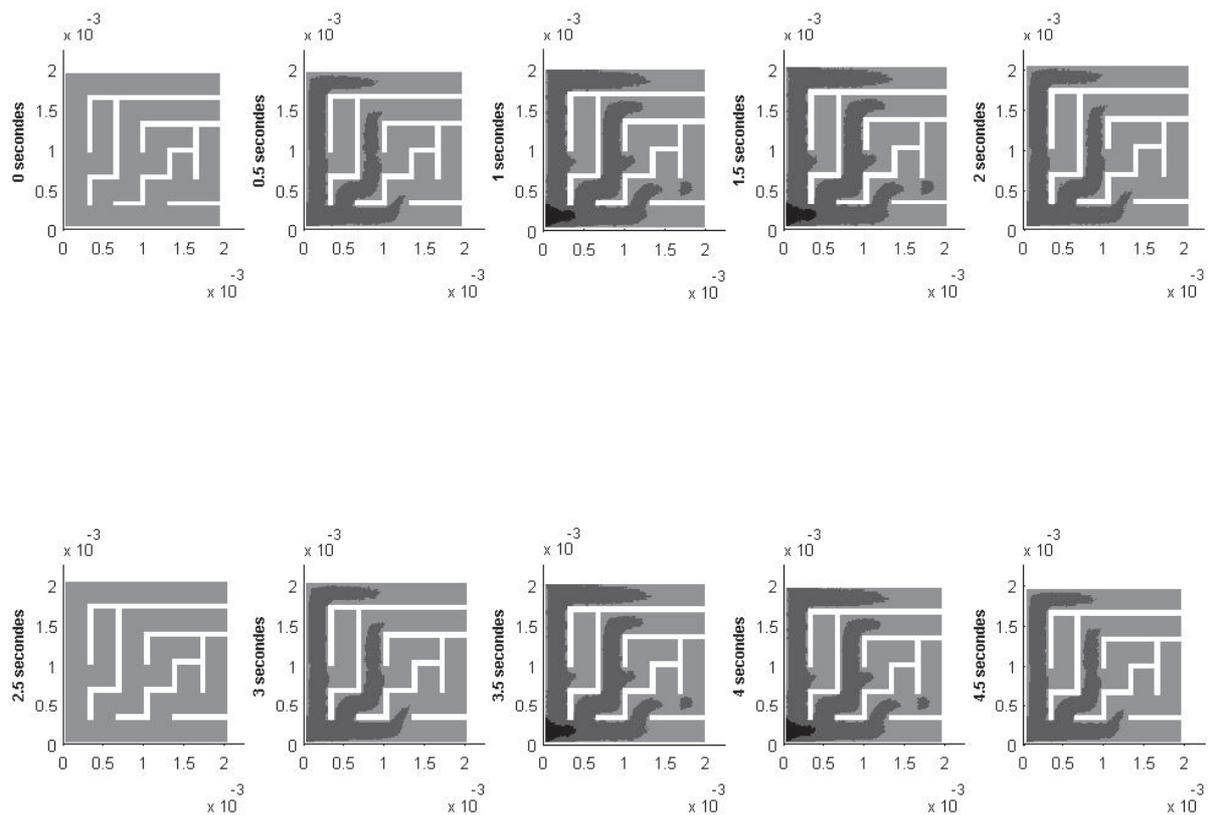


FIG. 5.4 – Lignes de niveau $Pe = 0.05$ et $Pe = 0.005$ des nombres de Péclet acinaires pour l'oxygène. La zone noire correspond aux nombres de Péclet supérieurs à 0.05, la zone gris foncé, à des nombres compris entre 0.005 et 0.05 et enfin la zone gris clair aux nombres inférieurs à 0.005. Le Péclet maximum est mesuré à l'entrée à mi-inspiration et vaut 0.08. La convection représente donc au plus 8% du mouvement des molécules d'oxygène, chiffre qui n'apparaît qu'aux moments les plus véloces de la respiration et qui, même dans ce cas, tombe rapidement sous les 5% (régions grises).

Professeur E.R. Weibel dans [63]. Les vitesses les plus grandes sont en effet de l'ordre de 0.1 m.s^{-1} .

Pour avoir dès maintenant un ordre d'idée sur les influences relatives de la diffusion et de la convection, on peut utiliser le nombre de Péclet acinaire. Toutefois la définition donnée dans [44] n'est applicable qu'à des arbres symétriques dans lesquels on peut définir la distance d'un point au fond de la structure. Dans une géométrie telle que celle de la figure 5.2, le fond est accessible à plusieurs endroits qui peuvent être à des distances différentes. Cependant, pour obtenir un ordre de grandeur du nombre de Péclet acinaire, on peut définir la distance $L(x, t)$ d'un point x au fond de l'arbre comme étant la distance à l'extrémité la plus proche. Ainsi, on note $Pe(x, t)$ le nombre de Péclet acinaire correspondant à ce choix de longueur, il s'exprime au point x et au temps t ,

$$Pe(x, t) = v(x, t) \times \frac{L(x, t)}{D}$$

où $v(x, t)$ est la vitesse du gaz acinaire au point x et au temps t (voir figure 5.3). D est le coefficient de diffusion de l'espèce considérée, par exemple $D = 0.2 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ pour la diffusion de l'oxygène dans l'air et $D = 0.14 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ pour la diffusion du dioxyde de carbone dans l'air. A noter que les $L(x, t)$ choisis sont les plus petits possibles, et donc l'influence de la convection est un peu sous-estimée. Les observations effectuées ne sont donc données qu'à titre indicatif.

Dans ces hypothèses, la figure 5.4 montre les lignes de niveau $Pe = 0.05$ et $Pe = 0.005$ du nombre de Péclet approximatif défini ci-dessus. La zone noire correspond à la région où la convection représente plus de 5% du mouvement. Dans la zone gris foncé, la convection y représente entre 0.5 et 5% et enfin dans la zone gris clair elle y représente moins de 0.5% du mouvement. A noter que le nombre de Péclet est maximum à mi-inspiration ($t = 2.5 \text{ s}$) et vaut $0.08 = 8\%$. Ainsi, on voit qu'en régime de repos, la convection représente toujours moins de 10% du mouvement. Remarquons enfin que le Péclet ne dépasse 0.05 qu'aux moments des plus grandes vitesses du cycle respiratoire et sur une zone peu étendue (région noire sur la figure 5.4, correspondant aux Péclet entre 0.05 et 0.08). Ces premières observations vont dans le sens du fonctionnement majoritairement diffusif du sous-acinus en régime de repos [44]. Il faut néanmoins préciser ce résultat étant donné que l'on ne dispose que d'une approximation, de surcroît sous-estimée, du nombre de Péclet acinaire.

5.3 Conclusion

Ce chapitre est un travail préliminaire à une étude complète du transfert d'oxygène et de dioxyde de carbone dans l'acinus prenant en compte le phénomène de convection-diffusion. Les premières indications, issues de nos calculs, confirment que la diffusion des molécules est dominante dans un système subacinaire en régime de repos. Néanmoins, dans le cadre d'un acinus entier, la convection de ces molécules due au mouvement du fluide a une plus grande influence et peut jouer un rôle non négligeable dans le transport des molécules échangées entre l'air et le sang. Il est tout à fait envisageable, d'un point

de vue théorique et numérique, d'étudier la diffusion de ces molécules en présence de convection dans un acinus réaliste et respirant.

Remarquons ensuite que nous avons calculé les flux dans le cadre d'un régime de repos et avec un nombre de Péclet acinaire défini relativement aux extrémités les plus proches. Des simulations à différents régimes respiratoires et avec une meilleure définition du nombre de Péclet acinaire doivent être effectuées. En particulier, pour définir correctement ce nombre de Péclet acinaire, on doit plutôt utiliser la loi de Fick, qui permet d'exprimer la vitesse de diffusion en chaque point

$$v_D(x, t) = \frac{D\nabla C(x, t)}{C(x, t)}$$

où D est le coefficient de diffusion dans l'air de l'espèce considérée (oxygène ou dioxyde de carbone) et $C(x, t)$ la concentration au point x et au temps t de l'espèce dont on étudie la diffusion. Cette vitesse de diffusion nécessite donc une carte des concentrations $C(x, t)$ dans l'acinus, qui ont été obtenues par M. Felici [19], avec qui nous collaborons pour ce projet.

Ce travail, de bases physiologiques et physiques, est intimement lié à la mise en oeuvre d'outils mathématiques et numériques calculant des flux dans des géométries variables au cours du temps. Une première méthode, basée sur un changement de variable permettant de se ramener à des équations aux dérivées partielles sur un domaine fixe en temps, a été utilisée avec succès. La mise en place d'une seconde méthode, dite de pénalisation, est en cours de réalisation. Une étude théorique des erreurs doit encore être effectuée, le but final étant de comparer les vitesses et précisions des convergences, afin d'améliorer nos résultats. Cette deuxième méthode ouvre des portes sur de nombreux problèmes mathématiques, que nous étudions en collaboration avec Didier Bresch.

5.4 Mise en oeuvre numérique, méthode par changement de variable

Dans ce chapitre la méthode de résolution des équations 5.2 est présentée. Tout d'abord les éléments finis utilisés sont définis. Ils ont la particularité d'être issus de la théorie de la géométrie différentielle, et plus particulièrement des formes différentielles de Whitney. L'intérêt principal de ces éléments est qu'ils sont fournis "tout en un", ainsi leur structure particulière assure la convergence du schéma numérique [26]. C'est la conséquence des espaces discrets définis qui forment entre eux deux suites exactes, forte dans un sens et faible dans l'autre. Les plongements associés sont des versions discrètes des opérateurs rotationnel et divergence d'une part, et gradient et rotationnel d'autre part [8].

Ensuite, cette méthode est couplée avec une remontée des courbes caractéristiques permettant de traiter (par une intégration) les termes en temps et en gradient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} Y \cdot \nabla u$$

Tout d'abord nous allons présenter la résolution des équations de Stokes classiques en domaine fixe basée sur les éléments de Whitney, puis nous étendrons la méthode aux équations 5.2 en ajoutant la remontée des courbes caractéristiques.

5.4.1 Éléments de Whitney 2D, définition et propriétés

Définitions

Il faut d'abord donner une définition précise des opérateurs que nous allons utiliser tout au long de ce chapitre.

- On définit le rotationnel d'une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par le vecteur

$$rot(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$$

- Le gradient d'une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par le vecteur

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Le rotationnel d'une fonction $u = (u_1, u_2)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est la fonction scalaire définie par

$$rot(u) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

- La divergence d'une fonction $u = (u_1, u_2)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est la fonction scalaire définie par

$$div(u) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

- Le laplacien s'exprime par l'intermédiaire des opérateurs définis précédemment :

$$\Delta u = -rot(rot(u)) + \nabla(div(u))$$

Il y a donc quatre opérateurs de base, deux transformant les fonctions scalaires en fonctions vectorielles et deux transformant les fonctions vectorielles en fonctions scalaires. Le laplacien est un opérateur composé obtenu par combinaison de ces quatre opérateurs de base. En particulier on note l'absence du gradient d'une fonction vectorielle, qui n'est pas discrétisable dans les espaces considérés. Néanmoins, son couplage avec le terme en temps dans l'étape des courbes caractéristiques permettra de le traiter, voir paragraphe

5.4.3.

On considère un maillage 2D, $\mathcal{M} = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{T})$ d'un domaine polyédrique Ω . \mathcal{N} , \mathcal{A} et \mathcal{T} correspondent respectivement à l'ensemble des noeuds, des arêtes et des triangles, les cardinaux de ces ensembles sont notés N , A et T . On appelle \mathcal{N}_0 (resp. \mathcal{A}_0) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) qui ne sont pas sur le bord de Ω , son cardinal est N_0 (resp. A_0). \mathcal{A} contient des arêtes orientées, on notera $a = (n, m) \in \mathcal{A}$ l'arête d'extrémités m et n , qui sont des noeuds inclus dans \mathcal{N} et on notera $-a = (m, n)$. Remarquons que si $a \in \mathcal{A}$ alors on supposera que $-a \notin \mathcal{A}$. De même on notera $T = (l, m, n)$ un triangle $T \in \mathcal{T}$ dont les bords sont les trois arêtes l , m et n et si $T \in \mathcal{T}$ et $a \in \mathcal{A}$, on dira $a \in T$ s'il existe b et c dans \mathcal{A} tels que $T = (a, b, c)$ où toute autre permutation de a , b ou c .

Nous allons maintenant définir les espaces d'éléments finis utilisés tout au long de ce chapitre. Ce sont donc des éléments bidimensionnels (il existe de la même façon des éléments tridimensionnels, voir [8]). Les éléments définis sur les noeuds sont des éléments P^1 classiques, puis, à partir de ce premier espace, on construit des éléments sur les arêtes et les triangles grâce aux quatre opérateurs de base. Ainsi

- On définit w_n pour $n \in \mathcal{N}$ comme les fonctions P^1 sur \mathcal{M} vérifiant

$$w_n(m) = \delta_{nm}$$

et on pose

$$W^0 = \langle (w_n)_{n \in \mathcal{N}} \rangle \quad \text{et} \quad W_0^0 = \langle (w_n)_{n \in \mathcal{N}_0} \rangle$$

- Pour $a = (m, n) \in \mathcal{A}$, on pose

$$w_a = w_m \text{rot}(w_n) - w_n \text{rot}(w_m)$$

et on note

$$W^1 = \langle (w_a)_{a \in \mathcal{A}} \rangle \quad \text{et} \quad W_0^1 = \langle (w_a)_{a \in \mathcal{A}_0} \rangle$$

- Enfin pour $T = (l, m, n) \in \mathcal{T}$, w_T est défini par

$$w_T = 2[w_l \nabla(w_m) \cdot \text{rot}(w_n) + w_m \nabla(w_n) \cdot \text{rot}(w_l) + w_n \nabla(w_l) \cdot \text{rot}(w_m)]$$

On pose

$$W^3 = \langle (w_T)_{T \in \mathcal{T}} \rangle$$

Les trois types d'éléments sont représentés sur la figure 5.5. W^0 et W^2 sont des espaces de fonctions scalaires, W^1 est un espace de fonctions vectorielles. La vitesse est discrétisée dans W^1 tandis que la pression peut l'être dans W^0 ou W^2 (par dualité du problème). Le choix effectué pour la pression a peu d'influence en pratique, ici elle a été discrétisée

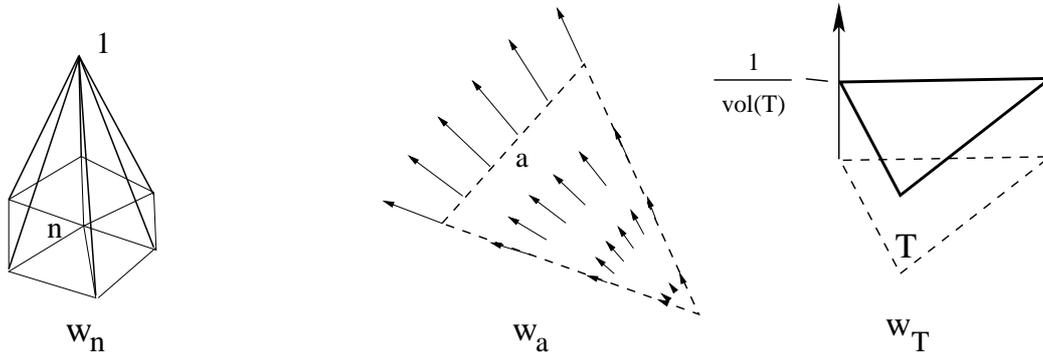


FIG. 5.5 – Les trois types d’éléments utilisés dans ce chapitre. $w_n \in W^0$ est une fonction chapeau P^1 classique, valant 1 au noeud $n \in \mathcal{N}$ et 0 aux autres noeuds. $w_a \in W^1$ définit un flux non nul à travers l’arête $a \in \mathcal{A}$ et un flux nul à travers toutes les autres arêtes. Enfin $w_T \in W^2$ est une fonction constante non nulle sur $T \in \mathcal{T}$ et nulle sur tous les autres triangles. La vitesse u est discrétisée par les w_a , la pression p par les w_T .

dans W^2 .

On définit ensuite les matrices d’incidence $R_i \in \mathcal{M}_{A \times N}$ et $D_i \in \mathcal{M}_{N \times T}$, qui permettront d’exprimer simplement les plongements d’un espace à l’autre. Si $n \in \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$ et $T \in \mathcal{T}$, on pose

$$R_i(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists m \in \mathcal{N} \text{ tq } a = (m, n) \\ -1 & \text{si } \exists m \in \mathcal{N} \text{ tq } a = (n, m) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad D_i(T, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in T \\ -1 & \text{si } -a \in T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés & conséquences

Plusieurs propriétés sont présentées dans cette section. En particulier les expressions matricielles des opérateurs adjoints seront très utiles pour la suite. Les preuves, relativement simples, ne sont pas décrites ici, nous renvoyons le lecteur à la référence [8] pour le détail des démonstrations.

Propriétés élémentaires :

- $w_T = \frac{1}{\text{vol}(T)}$ sur T et est nul sur tous les autres triangles.
- $\text{rot}(w_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} R_i(a, n) w_a$.
- $\text{div}(w_a) = \sum_{T \in \mathcal{T}} D_i(T, a) w_T$.

En particulier, on a défini matriciellement les actions du rotationnel sur W^0 et de la divergence sur W^1 . On ne peut toutefois définir de la même façon $rot(w_a)$ pour $w_a \in W^1$ et ∇w_T pour $w_T \in W^2$, car définis de façon forte ces deux expressions sont nulles. Il faut donc construire des opérateurs adjoints discrets qui correspondront effectivement aux opérateurs continus que l'on souhaite discrétiser. On utilise pour cela une expression faible de ces opérateurs. A noter que les expressions trouvées ci-dessus pour $rot(w_n)$ et $div(w_a)$ sont bien les mêmes en formulation faible.

Construction des opérateurs adjoints :

Nous allons construire dans ce paragraphe les opérateurs discrets qui nous manquent encore. Ces opérateurs sont les opérateurs adjoints de ceux précédemment définis, c'est grâce à cette propriété que nous les caractériserons. Etant discrets, ils seront représentés par des matrices dites *matrices de masse*, le terme masse signifiant que la géométrie intervient dans les éléments de la matrice, ce qui n'était pas le cas pour les matrices d'incidence qui ne dépendent que de la connectivité du maillage.

- On définit l'application rot de W^1 dans W^0 faiblement : $\forall f \in W^0$,

$$\int_{\Omega} rot(v).f = \int_{\Omega} v.rot(f) + \int_{\partial\Omega} (v.\tau)f = \sum_{(n,a) \in \mathcal{N} \times \mathcal{A}} \left[\int_{\Omega} w_a.rot(w_n) + \int_{\partial\Omega} (w_a.\tau)w_n \right] u_a f_n$$

On peut alors définir une matrice du rotationnel (matrice de masse) de W^1 dans W^0 par $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + \mathcal{B}$ où

$$\mathcal{R} = \left(\int_{\Omega} rot(w_n).w_a \right)_{(n,a) \in \mathcal{N} \times \mathcal{A}}$$

$$\mathcal{B} = \left(\int_{\partial\Omega} (w_a.\tau)w_n \right)_{(n,a) \in \mathcal{N} \times \mathcal{A}}$$

Deux matrices apparaissent, la matrice \mathcal{B} étant une matrice de bord qui n'intervient que pour les w_a associés aux arêtes du bord. Grâce aux propriétés élémentaires, on peut exprimer plus précisément la matrice \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}_{n,a} = \sum_{b \in \mathcal{A}} R_i(b, n) \int_{\Omega} w_b.w_a$$

- On définit l'application ∇ de W^2 dans W^1 faiblement par : $\forall v \in W^1$,

$$\int_{\Omega} v.\nabla(g) = - \int_{\Omega} div(v).g + \int_{\partial\Omega} (v.n)g = \sum_{(a,T) \in \mathcal{A} \times \mathcal{T}} \left[- \int_{\Omega} div(w_a).w_T + \int_{\partial\Omega} (w_a.n)w_T \right] v_a g_T$$

Remarquons qu'en général, on travaillera avec des fonctions test $v \in W_0^1$, dans ce cas, l'expression du gradient se réduit à

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla(g) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) \cdot g = \sum_{(a,T) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{T}} \left[- \int_{\Omega} \operatorname{div}(w_a) \cdot w_T \right] v_a g_T$$

On définit alors la matrice de masse du gradient

$$\mathcal{G} = \left(- \int_{\Omega} \operatorname{div}(w_a) \cdot w_T \right)_{a,T \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{T}}$$

Plus précisément, grâce aux propriétés élémentaires,

$$\mathcal{G}_{a,T} = - \sum_{T' \in \mathcal{T}} D_i(T', a) \int_{\Omega} w_{T'} \cdot w_T$$

On a alors la suite exacte (définie au sens fort) :

$$W^0 \xrightarrow{\operatorname{rot}} W^1 \xrightarrow{\operatorname{div}} W^2$$

et la suite exacte retour (définie au sens faible) :

$$W^0 \xleftarrow{\operatorname{rot}} W^1 \xleftarrow{-\nabla} W^2$$

Les propriétés d'exactitude de ces suites et leurs conséquences, en particulier sur la convergence du schéma, sont traitées en détail dans les références [8, 26].

5.4.2 Résolution de Stokes

La première étape est la résolution des équations de Stokes stationnaires. Ces équations gèrent le mouvement stationnaire des flux à petites vitesses. Dans cette partie, nous décrivons la méthode utilisée, puis dans la suivante nous l'étendons aux équations 5.2.

Problème

Rappelons les équations, on veut résoudre sur un domaine Ω :

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + \nabla P = 0 \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 \\ \bar{u} = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On cherche une solution \bar{u} dans l'espace $H^1(\Omega)$, on suppose de plus $u_0 \in H^1(\Omega)$ (en fait on construit un relèvement de u_0 , qui n'est a priori que défini sur le bord). Considérons

maintenant $u = \bar{u} - u_0 \in H_0^1(\Omega)$. u est alors une solution nulle au bord du système équivalent, avec seconds membres :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla P = \Delta u_0 \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_0) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Maintenant réécrivons ce système de façon à faire apparaître les opérateurs que nous savons discrétiser. u est alors solution des équations équivalentes suivantes, avec w_0 et w des fonctions de $L^2(\Omega)$ (nous utilisons ici l'égalité $\Delta u = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(u)) + \operatorname{grad}(\operatorname{div}(u))$) :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla P = \Delta u_0 \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_0) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_0 = \operatorname{rot}(u_0) \\ w = \operatorname{rot}(u) \\ \operatorname{rot}(w) + \nabla P + \operatorname{rot}(w_0) = 0 \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_0) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Enfin en remarquant $u = 0$ sur $\partial\Omega$ équivaut à une vitesse nulle sur $\partial\Omega$ selon la normale ($u \cdot n = 0$) et selon la tangente ($u \cdot \tau = 0$), les équations précédentes sont donc équivalentes à chercher $u \in H_{\perp}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $P \in L^2(\Omega)$ tels que, avec w_0 et w deux fonctions de $L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} w_0 = \operatorname{rot}(u_0) \\ w = \operatorname{rot}(u) \\ \operatorname{rot}(w) + \nabla P + \operatorname{rot}(w_0) = 0 \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_0) \\ u \cdot \tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On considère maintenant le problème variationnel associé à ces équations, excepté pour la partie divergence que l'on pourra exprimer fortement dans notre espace discret :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w_0 f = \int_{\Omega} \operatorname{rot}(u_0) f = \int_{\Omega} u_0 \operatorname{rot}(f) + \int_{\partial\Omega} (u_0 \cdot \tau) f & \forall f \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} w f = \int_{\Omega} \operatorname{rot}(u) f = \int_{\Omega} u \operatorname{rot}(f) + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \tau) f = \int_{\Omega} u \operatorname{rot}(f) & \forall f \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot}(w) v + \int_{\Omega} \nabla P v + \int_{\Omega} \operatorname{rot}(w_0) v = 0 & \forall v \in H_{\perp}^1(\Omega) \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_0) \end{cases}$$

Le problème à résoudre est finalement : trouver $(w_0, w, u, P) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\perp}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} w_0 f = \int_{\Omega} u_0 \text{rot}(f) + \int_{\partial\Omega} (u_0 \cdot \tau) f \quad \forall f \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} w f = \int_{\Omega} u \text{rot}(f) \quad \forall f \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \text{rot}(w)v - \int_{\Omega} P \text{div}(v) + \int_{\Omega} \text{rot}(w_0)v = 0 \quad \forall v \in H_{\perp}^1(\Omega) \\ \text{div}(u) = -\text{div}(u_0) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

La condition au bord originale $u = 0$ est décomposée en deux parties distinctes : $u \cdot n = 0$ et $u \cdot \tau = 0$. La première est vérifiée grâce à l'espace $H_{\perp}^1(\Omega)$ dans lequel on recherche u . La seconde est une conséquence de la deuxième équation du problème 5.3, dans laquelle on a imposé $\int_{\partial\Omega} (u \cdot \tau)g = 0$ pour tout $g \in L^2(\Omega)$. A partir de cette écriture du système, nous allons pouvoir travailler dans les espace discrets présentés dans le paragraphe 5.4.1.

Discrétisation

Le système d'équations 5.3 est donc discrétisé à l'aide des éléments de Whitney. Les espaces discrets sont :

- $W^0 \subset L^2(\Omega)$ contient les versions discrètes de w_0 , w et f .
- $W_0^1 \subset H_{\perp}^1(\Omega)$ contient les versions discrètes de u et v .
- $W^1 \subset H^1(\Omega)$ contient la version discrète de u_0 .
- $W^2 \subset L^2(\Omega)$ contient la version discrète de P .

En décomposant chacune des discrétisations des différentes fonctions sur les bases de leurs espaces respectifs, on obtient des versions matricielles des équations de 5.3 correspondantes. Ainsi, dans le même ordre que 5.3, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^t F M_{11} W_0 &= {}^t F R_{11} U_0 + {}^t F B_{11} U_0 \\ F &\in \mathbb{R}^N, W_0 \in \mathbb{R}^N, U_0 \in \mathbb{R}^A \\ M_{11} &= (\int_{\Omega} w_n w_m)_{N \times N}, R_{11} = (\int_{\Omega} w_a \text{rot}(w_n))_{N \times A}, B_{11} = (\int_{\partial\Omega} (w_a \cdot \tau) w_n)_{N \times A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t F M_{11} W &= {}^t F R_{10} U \\ F &\in \mathbb{R}^N, W \in \mathbb{R}^N, U \in \mathbb{R}^{A_0} \\ M_{11} &= (\int_{\Omega} w_n w_m)_{N \times N}, R_{10} = (\int_{\Omega} w_a \text{rot}(w_n))_{N \times A_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t V {}^t R_{01} W - {}^t V G_{00} P + {}^t V {}^t R_{01} W_0 &= 0 \\ V &\in \mathbb{R}^{A_0} \\ G_{00} &= (\int_{\Omega} w_T \text{div}(w_a))_{A_0 \times T}, R_{01} = (\int_{\Omega} \text{rot}(w_n) w_a)_{N \times A_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{00} U &= -\mathcal{D}_{01} U_0 \\ \mathcal{D}_{00} &= D_i(1 : T, 1 : A_0), \mathcal{D}_{01} = D_i(1 : T, 1 : A) \end{aligned}$$

Chacune des matrices R_{ij} est une sous-matrice de la matrice de masse $\mathcal{R}(= R_{11})$ présentée dans le chapitre 5.4.1. De même on a $G_{00} = \mathcal{G}$. La construction d'un relèvement discret de u_0 se fait très simplement. Il suffit en effet d'imposer à zéro les coefficients de sa décomposition sur les arêtes intérieures. La connaissance du flux sur le bord permet d'obtenir les derniers coefficients, associés aux arêtes du bord. Il faut que le flux entrant sur les arêtes de Γ^1 soit égal au flux sortant sur les arêtes de Γ^2 (voir le cas détaillé dans le chapitre suivant 5.4.3). Ainsi,

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & -R_{10} & 0 \\ {}^tR_{01} & {}^tR_{01} & 0 & -G_{00} \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{00} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_0 \\ W \\ U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_{11} + B_{11})U_0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{D}_{01}U_0 \end{pmatrix}$$

Le problème se résume donc à un système linéaire du type $A.x = b$. Le calcul des coefficients des matrices peut se faire de manière exacte, compte-tenu des éléments choisis. On peut montrer que A est une matrice creuse inversible. La solution approchée des équations de Stokes est alors $\tilde{U} = U + U_0$. Dans un soucis de validation du code, la résolution de ce système a été effectuée sur des géométries classiques, comme un tube bidimensionnel avec des profils de vitesses paraboliques en entrée et en sortie et une condition de non-glissement sur la paroi. A noter que ces simulations ont été effectuées en couplant du code Matlab et du code $C++$.

5.4.3 Extension au problème de l'acinus

Dans cette partie nous allons discrétiser le système 5.2 à l'aide des éléments de Whitney définis au paragraphe 5.4.1. Cette fois le temps intervient et nous devons lui aussi le discrétiser. De plus, nous ferons en sorte que le terme en ∇u soit absorbé dans le processus. La discrétisation de ces deux termes utilise la méthode dite de remontée des caractéristiques. Voici les différentes étapes de la résolution numérique :

1. une remontée des caractéristiques pour intégrer : $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} Y \cdot \nabla u$.
2. une méthode de quadrature pour discrétiser les intégrales de la première étape, à chaque pas de temps on obtient alors une équation sensiblement identique à Stokes du point de vue de la résolution.
3. une résolution par Whitney de cette équation.

Ecriture des équations

On rappelle que l'on veut résoudre sur un domaine $Q =]0, T_m[\times \Omega$ les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [Y \cdot \nabla \bar{u}] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta \bar{u} + \frac{1}{k(t)} \nabla P = 0 & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 & \text{sur } Q \\ \bar{u}(0, Y) = u_0(k(0).Y) & \text{sur } \Omega \\ \bar{u} = u_b^0 = u_b(t, k(t).Y) = \begin{cases} k'(t).Y & \text{sur } \Gamma^2 \\ b(t, Y) & \text{sur } \Gamma^1 \end{cases} & \end{array} \right. \quad (5.4)$$

En premier lieu, effectuons le changement de variable $u = \bar{u} - u_b^0$ (où u_b^0 a été relevé sur tout Ω), pour nous ramener à une fonction nulle sur le bord, ce qui donne le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [Y \cdot \nabla u] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u + \frac{1}{k(t)} \nabla P = -\frac{\partial u_b^0}{\partial t} + \frac{k'(t)}{k(t)} [Y \cdot \nabla u_b^0] + \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u_b^0 & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(u) = -\operatorname{div}(u_b^0) & \text{sur } Q \\ u(0, Y) = u_0(k(0).Y) - u_b^0(0, Y) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Nous allons discrétiser le temps par pas de longueurs constantes Δt , ainsi, on cherche à résoudre le système 5.5 aux temps $t_n = n \times \Delta t$, $n \in [0, N]$ en supposant que $N \times \Delta t \leq T_m$.

Remontée des caractéristiques

On définit la courbe caractéristique de 5.5 passant en Y en t_{n+1} comme une solution de l'équation différentielle définie sur $]a_n, t_{n+1}[$ avec $a_n < t_n$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_Y}{dt}(t) = \begin{cases} -\frac{k'(t)}{k(t)} X_Y(t) & \text{si } X_Y(t) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ X_Y(t_{n+1}) = Y \end{array} \right. \quad (5.6)$$

La solution de cette équation est explicite sur $X_Y^{-1}(\Omega)$: $X_Y(t) = \frac{k(t_{n+1})}{k(t)}.Y$. Il faut remarquer que l'on va remonter le temps, donc on s'intéresse aux temps inférieurs à t_{n+1} . Quand on est dans le complémentaire de $X_Y^{-1}(\Omega)$ dans $]a_n, t_{n+1}[$, alors X_Y est constant et égal à une valeur qui situe X_Y sur le bord de Ω pour tous les temps précédents, voir figure 5.6. Ce "blocage" artificiel de la solution n'est pas gênant car nous nous intéressons aux valeurs de $u(t_n, X_Y(t_n))$ et $u(t_{n+1}, X_Y(t_{n+1}))$ qui sont toujours nulles sur le bord.

Ainsi le terme $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)}. \nabla u$ peut être intégré le long de la courbe $(t, X_Y(t))$, en effet :

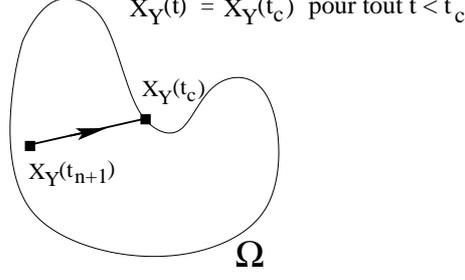


FIG. 5.6 – En remontant le temps, on longe une droite à la vitesse $-k'(t_{n+1})/k(t)$. Il est alors possible que l'on rencontre le bord de Ω à un temps t_c , dans ce cas la solution se fige et reste bloquée pour tous les temps $t < t_c$.

$$\frac{d}{dt} [t \rightarrow u(t, X_Y(t))] = t \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_Y(t)) + \frac{dX_Y}{dt}(t) \cdot \nabla u(t, X_Y(t))$$

On écrit donc les équations 5.5 aux points $(t, X_Y(t))$, ce qui donne, si on note $v(t) = u(t, X_Y(t))$ et $w(t) = u_b^0(t, X_Y(t))$:

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u(t, X_Y(t)) + \frac{1}{k(t)} \nabla P(t, X_Y(t)) = -\frac{dw}{dt} + \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u_b^0(t, X_Y(t))$$

Puis on intègre entre les temps t_n et t_{n+1} :

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) - v(t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u(t, X_Y(t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{k(t)} \nabla P(t, X_Y(t)) dt \\ = w(t_n) - w(t_{n+1}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u_b^0(t, X_Y(t)) dt \end{aligned}$$

En approchant les intégrales par la méthode des rectangles : $\int_a^b f(t) dt = (b - a)f(b)$, on obtient sachant que $Y = X_Y(t_{n+1})$:

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, Y) - \Delta t \frac{\mu}{k(t_{n+1})^2} \Delta u(t_{n+1}, Y) + \frac{\Delta t}{k(t_{n+1})} \nabla P(t_{n+1}, Y) \\ = u(t_n, X_Y(t_n)) + u_b^0(t_n, X_Y(t_n)) - u_b^0(t_{n+1}, Y) + \frac{\mu \Delta t}{k(t_{n+1})^2} \Delta u_b^0(t_{n+1}, Y) \end{aligned}$$

Cette dernière équation a beaucoup de points communs avec l'équation classique de Stokes. A noter que l'on a choisi une discrétisation implicite en temps qui va nécessiter l'inversion du système linéaire final. Le choix des différences finies implicites est une question de stabilité [57]. En utilisant la décomposition du laplacien en rotationnels et en tenant compte de l'équation sur les divergences, il vient :

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}, Y) + \Delta t \frac{\mu}{k(t_{n+1})^2} \text{rot}(\text{rot}(u))(t_{n+1}, Y) + \frac{\Delta t}{k(t_{n+1})} \nabla P(t_{n+1}, Y) \\ = u(t_n, X_Y(t_n)) + u_b^0(t_n, X_Y(t_n)) - u_b^0(t_{n+1}, Y) - \frac{\mu \Delta t}{k(t_{n+1})^2} \text{rot}(\text{rot}(u_b^0))(t_{n+1}, Y) \end{aligned}$$

Et enfin on peut écrire la formulation faible de l'équation 5.5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} w.f = \int_{\Omega} rot(u).f \\ \int_{\Omega} w_b^0.f = rot(u_b^0).f \\ \left[\begin{array}{l} \int_{\Omega} u(t_{n+1}, Y).v(Y)dY + \Delta t \frac{\mu}{k(t_{n+1})^2} \int_{\Omega} rot(w)(t_{n+1}, Y).v(Y)dY \\ + \frac{\Delta t}{k(t_{n+1})} \int_{\Omega} \nabla P(t_{n+1}, Y).v(Y)dY + \frac{\mu}{k(t_{n+1})^2} \int_{\Omega} rot(w_b^0)(t_{n+1}, Y).v(Y)dY \\ = \int_{\Omega} u(t_n, X_Y(t_n)).v(Y)dY + \int_{\Omega} u_b^0(t_n, X_Y(t_n)).v(Y)dY - \int_{\Omega} u_b^0(t_{n+1}, Y).v(Y)dY \end{array} \right] \\ div(u) = -div(u_b^0) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Ces équations ne font plus intervenir que les quatre opérateurs de base, toutes les inconnues sont exprimées au temps t_{n+1} et dépendent des fonctions paramètres du problème ainsi que de la solution au temps t_n , supposée calculée précédemment (ou initialisée par u_0 au temps t_0). Il reste donc maintenant à écrire le système linéaire associé à la formulation de cette équation dans les espaces discrets.

Résolution par Whitney au temps t_{n+1}

Discrétisation de $u_b(t_{n+1}, \cdot)$

La fonction $u_b(t_{n+1}, \cdot)$ est discrétisée dans l'espace W^1 , ainsi elle est représentée par un vecteur U_b^{n+1} dont les coordonnées correspondent aux flux à travers les arêtes, plus précisément à travers les arêtes du bord car u_b est un relèvement d'une fonction définie seulement sur le bord. Ainsi :

$$U_{b,a}^{n+1} = \int_a u_b(t_{n+1}, Y).n_a = \begin{cases} \int_a b(t, Y).n_a \quad \forall a \in \Gamma^1 \\ k'(t_{n+1}) \times \int_a Y.n_a \quad \forall a \in \Gamma^2 \end{cases}$$

et pour conserver les flux, les coefficients de U_b doivent vérifier :

$$\sum_{a \in \Gamma^2} D_i(a, T_a) \times U_{b,a}^{n+1} = - \sum_{a \in \Gamma^1} D_i(a, T_a) \times U_{b,a}^{n+1}$$

Si $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$, $T_a \in \mathcal{T}$ est l'unique triangle contenant l'arête a . Ce triangle est bien unique étant donné que a est une arête du bord. On remarque ici que l'on doit tenir compte de l'orientation des arêtes dans le triangle, $U_{b,a}^{n+1}$ correspondant au flux sortant du triangle T_a si $D_i(a, T_a) = 1$ et au flux entrant si $D_i(a, T_a) = -1$.

Mise en oeuvre

Outre les constantes supplémentaires, il convient de remarquer que de nouveaux termes apparaissent par rapport à Stokes classique (équations 5.3) dans le système 5.7. Ces termes font intervenir des fonctions qui seront discrétisées dans W^1 ($u_b^0(t_n, \cdot) \rightarrow U_b^n$) et dans W_0^1 ($u(t_n, \cdot) \rightarrow U^n$ et $v \rightarrow V$) :

- $\int_{\Omega} u(t_{n+1}, Y).v(Y)dY = \sum_{a,a' \in \mathcal{A}_0} U_a^{n+1} V_{a'} \int_{\Omega} w_a.w_{a'} = {}^t V A_{00} U^{n+1}$
- $\int_{\Omega} u(t_n, X_Y(t_n)).v(Y)dY = \sum_{a,a' \in \mathcal{A}_0} U_a^n V_{a'} \int_{\Omega} w_a(X_Y(t_n)).w_{a'}(Y)dY = {}^t V \bar{A}_{00} U^n$
- $\int_{\Omega} u_b^0(t_n, X_Y(t_n)).v(Y)dY = \sum_{(a,a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_0} U_{b,a}^n V_{a'} \int_{\Omega} w_a(X_Y(t_n)).w_{a'}(Y)dY = {}^t V \bar{A}_{01} U_b^n$
- $\int_{\Omega} u_b^0(t_{n+1}, Y).v(Y)dY = \sum_{(a,a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}_0} U_{b,a}^{n+1} V_{a'} \int_{\Omega} w_a.w_{a'} = {}^t V A_{01} U_b^{n+1}$

Ainsi, on obtient le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & -R_{10} & 0 \\ \frac{\mu \Delta t}{k^2(t_{n+1})} {}^t R_{01} & \frac{\mu \Delta t}{k^2(t_{n+1})} {}^t R_{01} & A_{00} & -\frac{\Delta t}{k(t_{n+1})} G_{00} \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{00} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_b^{n+1} \\ W^{n+1} \\ U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (R_{11} + B_{11})U_b^{n+1} \\ 0 \\ \bar{A}_{00}U^n + \bar{A}_{01}U_b^n - A_{01}U_b^{n+1} \\ -\mathcal{D}_{01}U_b^{n+1} \end{pmatrix}$$

Encore une fois, on peut montrer que la matrice est inversible. La solution approchée de l'équation 5.4 est alors reconstruite : $\tilde{U}^{n+1} = U^{n+1} + U_b^{n+1}$. Il faut ensuite revenir au domaine variable en temps, la vitesse \tilde{U}^{n+1} est donc recalée sur $\Omega_{t_{n+1}} = k(t_{n+1}).\Omega$, le flux \tilde{U}_a^{n+1} à travers l'arête a du maillage de Ω étant alors considéré comme le flux à travers l'image de a par l'homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport $k(t_{n+1})$.

Approximation de $\int_{\Omega} w_a(X_Y(t_n)).w_b(Y)dY$

Le calcul de ce terme est délicat, non seulement très difficile à exprimer théoriquement, il sera très lourd à calculer numériquement. C'est pourquoi nous avons choisi de l'approcher par une intégrale beaucoup plus simple. Rappelons l'expression de X_Y s'il ne rencontre pas $\partial\Omega$, $X_Y(t) = \frac{k(t_{n+1})}{k(t)}.Y$. Le but de cette partie est de montrer que l'on peut approcher

$$\int_{\Omega} w_a(X_Y(t_n)).w_b(Y)dY \quad \text{par} \quad \int_{\Omega} w_a(Y).w_b(Y)dY$$

Notons D leur différence. Pour montrer que l'erreur tend vers 0 avec Δt , il va falloir travailler sur des sous-ensembles de Ω où w_a est C^1 , à savoir les triangles. Pour $T \in \mathcal{T}$, notons $\alpha_n(T) = \{Y \in \Omega \mid X_Y(t_n) \in T\}$. Ainsi, on peut décomposer $T \in \mathcal{T}$ sous la forme d'une partition

$$T = (\alpha_n(T) \cap T) \cup (T \setminus (\alpha_n(T) \cap T))$$

Ainsi, nous pouvons exprimer la différence des intégrales

$$D = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\int_{\alpha_n(T) \cap T} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY + \int_{T \setminus (\alpha_n(T) \cap T)} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY \right]$$

Le point important est que $Y \rightarrow w_a(X_Y(t_n))$ et $Y \rightarrow w_a(Y)$ sont toutes deux C^1 sur $\alpha_n(T) \cap T$. En effet, w_a est C^1 sur T et $Y \rightarrow X_Y(t_n)$ est C^1 sur $\alpha_n(T)$ car $X_Y(t)$ reste à l'intérieur de Ω par définition de $\alpha_n(T)$. Enfin $Y \rightarrow w_a(X_Y(t_n))$ est aussi C^1 sur $\alpha_n(T)$ par composition, vu que dans ces conditions $X_Y(t_n) \in T$. Ainsi nous pouvons appliquer l'inégalité de Taylor à la première intégrale, il existe $K > 0$ telle que

$$\left| \int_{\alpha_n(T) \cap T} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY \right| \leq K \times \int_{\alpha_n(T) \cap T} |X_Y(t_n) - Y| dY$$

Or $X_Y(t_n) - Y = \left(\frac{k(t_{n+1})}{k(t_n)} - 1\right)Y$, donc en effectuant un développement limité de $\frac{k(t_{n+1})}{k(t_n)}$ en prenant $t_n = t_{n+1} - \Delta t$, on obtient $\frac{k(t_{n+1})}{k(t_n)} = 1 + \Delta t \frac{k'(t_{n+1})}{k(t_{n+1})} + O(\Delta t^2)$. Donc, il existe une constante C_1 telle que :

$$\left| \int_{\alpha_n(T) \cap T} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY \right| \leq C_1 \times \Delta t$$

Maintenant considérons la seconde intégrale. Cette fois-ci, c'est la surface du domaine sur lequel on intègre qui va tendre vers 0. En effet si μ est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 ,

$$\mu(T \setminus (\alpha_n(T) \cap T)) = \mu(T) - \mu(\alpha_n(T) \cap T)$$

Or la figure 5.7 montre bien que quand Δt tend vers 0, les deux triangles se superposent. Par exemple, si $X_Y(t_n)$ ne touche pas le bord, cette superposition provient du fait que $\alpha_n(T) = \frac{k(t_{n+1})}{k(t_n)}T$ et que $\frac{k(t_{n+1})}{k(t_n)}$ tend vers 1 quand Δt tend vers 0. La mesure de

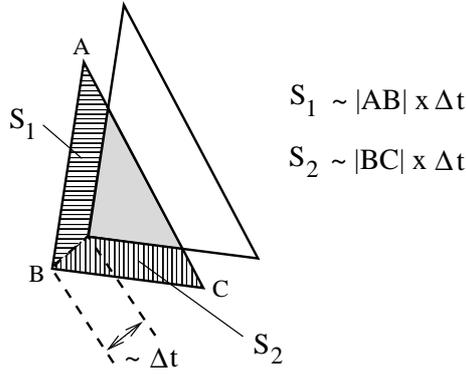


FIG. 5.7 – Le triangle ABC est le triangle T , l'autre est son image $\alpha_n(T)$ par $X_Y(t_n)$. Le décalage de coordonnées entre les deux triangles est proportionnel à Δt pour des Δt suffisamment petits. La figure montre que la surface de $T \setminus (\alpha_n(t) \cap T)$, qui vaut $S_1 + S_2$, est proportionnelle à Δt .

l'intersection tend donc vers la mesure du triangle T , $\mu(\alpha(T) \cap T) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mu(T)$. Ainsi, toutes les fonctions étant bornées,

$$\int_{T \setminus (\alpha(T) \cap T)} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$$

Remarquons que nous n'avons pas d'estimation précise de cette convergence, elle peut être obtenue en déterminant les différences de surfaces entre les deux triangles. Ces différences de surfaces sont proportionnelles à Δt comme l'indique intuitivement la figure 5.7. Pour conclure, à maillage fixé, il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|D| = \left| \int_{\Omega} (w_a(X_Y(t_n)) - w_a(Y)) \cdot w_b(Y) dY \right| \leq C \times \Delta t$$

Ainsi nous sommes assurés que l'approximation faite converge.

5.5 Vers une méthode de pénalisation

La méthode de résolution utilisée ci-dessus utilise un changement de variable qui fait apparaître de nouveaux termes dans les équations de Stokes. Ces termes peuvent être délicats à traiter et impliquent des calculs relativement longs. De plus un maillage du domaine, pas toujours facile à effectuer, est nécessaire. On doit ensuite le faire bouger au cours du temps. La méthode de pénalisation présentée dans ce chapitre permet de travailler sur une région fixe au cours du temps, suffisamment vaste pour contenir toutes les déformations de la géométrie. Cette méthode ajoute un seul terme à l'équation de Stokes, terme qui fait intervenir la fonction caractéristique de la géométrie mobile. Il s'agit en fait de considérer un domaine O contenant Ω_t pour tout t et de contraindre la solution à être nulle (ou presque nulle) sur $O \setminus \Omega_t$. Cette méthode fait apparaître une

couche limite autour de $\partial\Omega_t$ qui permet d'estimer la convergence. Pour des détails sur le calcul de l'erreur voir [14], les estimations pour notre cas sont relativement proches (travail en cours à l'écriture de ce manuscrit).

5.5.1 Cas simple

Pour bien comprendre le problème, un cas simple unidimensionnel où l'on connaît explicitement la solution, a d'abord été étudié. Cela permet en particulier de comprendre l'influence de la couche limite dans un cadre basique.

Problème posé

On cherche à résoudre le problème suivant où $t \in]0, 1[$:

$$\begin{cases} u''(x) = 1 & x \in]-1, t[\\ u(-1) = 0 \\ u(t) = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + (1-t)x - t)$. On va chercher une approximation par pénalisation sur $] -1, 1[$ de la forme :

$$\begin{cases} u_\epsilon''(x) + \frac{1}{\epsilon}1_{]t,1[}.u_\epsilon(x) = 1_{]-1,t[} & x \in]-1, 1[\\ u_\epsilon(-1) = 0 \\ u_\epsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

On voit que l'on a ajouté un terme $\frac{1}{\epsilon}1_{]t,1[}.u_\epsilon(x)$. Ainsi pour $x \in]t, 1[$, quand ϵ est petit, ce terme est prépondérant sur tous les autres et induit une équation limite sur $]t, 1[$ quand ϵ tend vers 0 qui est $u_\epsilon = 0$. Nous allons calculer des solutions intermédiaires avec ϵ suffisamment petit. Dans ce cas précis, pour trouver la solution u_ϵ de (5.9), nous allons découper $] -1, 1[$ en $] -1, t[\cup]t, 1[$:

1. Si $x \in] -1, t[$, alors (5.9) devient :

$$\begin{cases} u_\epsilon''(x) = 1 & x \in]-1, t[\\ u_\epsilon(-1) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Finalement $u_\epsilon(x) = \frac{1}{2}x^2 + Bx + A$ sur $]0, t[$ où A, B sont des constantes. La condition en -1 donne donc :

$$\frac{1}{2} - B + A = 0 \quad (5.11)$$

2. Si $x \in]t, 1[$, alors (5.9) devient :

$$\begin{cases} u_\epsilon''(x) + \frac{1}{\epsilon}u_\epsilon(x) = 0 & x \in]t, 1[\\ u_\epsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Alors u_ϵ est de la forme $Cch(x/\sqrt{\epsilon}) + Dsh(x/\sqrt{\epsilon})$. La condition en 1 donne :

$$Cch(1/\sqrt{\epsilon}) + Dsh(1/\sqrt{\epsilon}) = 0 \quad (5.13)$$

Calcul des constantes

Pour déterminer les constantes A , B , C et D , on utilise, en plus de (5.11) et (5.13), la continuité de la fonction u et de sa dérivée en t :

$$\circ t^2/2 + Bt + A = Cch(t/\sqrt{\epsilon}) + Dsh(t/\sqrt{\epsilon})$$

$$\circ t + B = [Csh(t/\sqrt{\epsilon}) + Dch(t/\sqrt{\epsilon})]/\sqrt{\epsilon}$$

Finalement, on obtient des fonctions $A(\epsilon, t)$, $B(\epsilon, t)$, $C(\epsilon, t)$ et $D(\epsilon, t)$ (voir à la fin de cette partie). Des exemples d'approximations obtenues dans les cas $t = -0.2$ et $\epsilon = 0.1$, 0.01 et 0.001 sont représentés sur la figure 5.8.

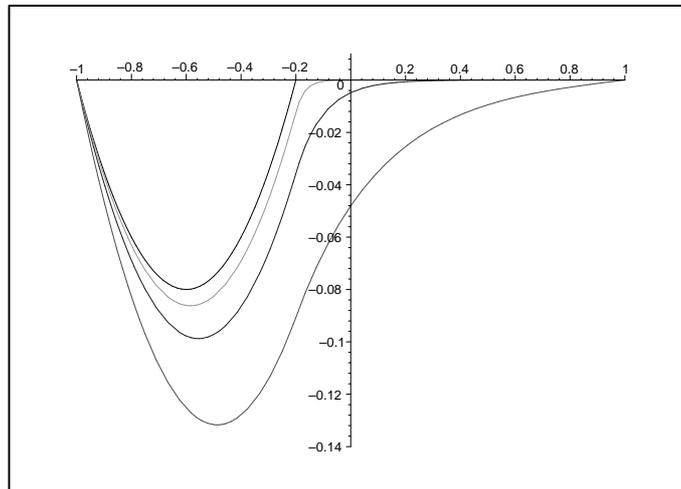


FIG. 5.8 – Approximations de u pour $t = -0.2$ et trois valeurs de ϵ (0.1 , 0.01 et 0.001). La courbe la plus haute est la solution exacte de l'équation 5.8 (parabole), puis les courbes du dessous correspondent aux trois approximations par pénalisation. Plus la courbe est éloignée de la vraie solution plus elle correspond à un ϵ grand. A noter le comportement autour $x = -0.2$, la courbe devient de plus en plus anguleuse à mesure que ϵ diminue.

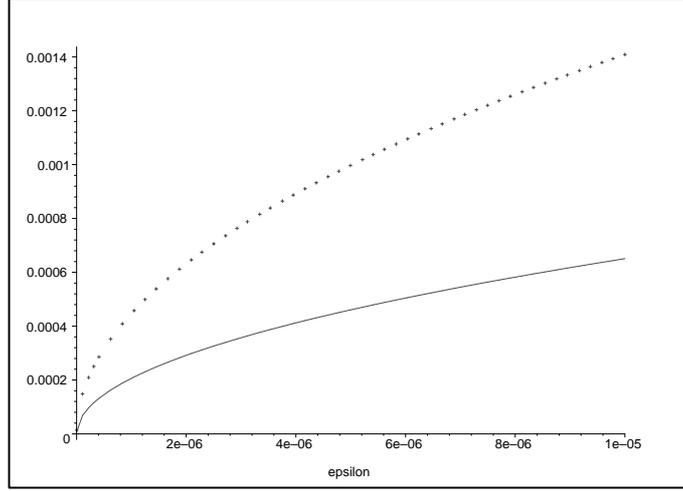


FIG. 5.9 – Erreur en norme $L^2([-1, -0.2])$ pour $t = -0.2$ entre u et son approximation u_ϵ (ligne continue) et erreur entre leurs dérivées (ligne pointillée). On voit nettement la décroissance en $\sqrt{\epsilon}$.

Estimation de l'erreur

Nous allons calculer l'erreur en terme de norme $H^1([-1, t])$, c'est à dire l'écart entre la fonction et son approximation et l'écart entre leurs dérivées. Les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel Maple.

$$(u - u_\epsilon)(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon} (t+1) (1+x) (e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})})}{-t e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} t - e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} + \sqrt{\epsilon} e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - \sqrt{\epsilon} e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})}}$$

$$(u - u_\epsilon)'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon} (t+1) (e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})})}{-t e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} t - e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} + \sqrt{\epsilon} e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - e^{(2\frac{t}{\sqrt{\epsilon}})} - \sqrt{\epsilon} e^{(2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})}}$$

On voit apparaître dans les deux formules la fonction de $Y = e^{2/\sqrt{\epsilon}}$:

$$Y \rightarrow \frac{Y^t - Y}{-tY - tY^t - Y + \sqrt{\epsilon}Y^t - Y^t - \sqrt{\epsilon}Y}$$

qui s'écrit encore :

$$Y \rightarrow \frac{Y^{t-1} - 1}{-t - tY^{t-1} - 1 + \sqrt{\epsilon}Y^{t-1} - Y^{t-1} - \sqrt{\epsilon}}$$

Or quand $\epsilon \rightarrow 0$, $Y \rightarrow +\infty$. Compte tenu que $-1 < t < 1$, on en déduit que la fonction ci-dessus a une limite quand ϵ tend vers 0 qui vaut $1/(1+t)$. Elle est donc bornée. Ainsi il existe $C > 0$ tel que :

$$|(u - u_\epsilon)(x)| + |(u - u_\epsilon)'(x)| \leq C|t+1||2+x|\sqrt{\epsilon}$$

Finalement on a une convergence en $\sqrt{\epsilon}$ de la norme $H^1([-1, t])$ de u_ϵ vers u . Un graphique de la convergence en fonction de ϵ pour $t = -0.2$ est représenté sur la figure 5.9.

Annexe : calcul des constantes

Le calcul des constantes a été effectué avec le logiciel Maple. Malgré la simplicité du problème considéré elles sont déjà relativement complexes.

$$\begin{aligned}
 A(\varepsilon, t) &= -\frac{1}{2} \frac{-t^2 (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - t^2 (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - 2\sqrt{\varepsilon}t (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + 2\sqrt{\varepsilon}t (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2}{-t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2} \\
 B(\varepsilon, t) &= -\frac{1}{2} \frac{-t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t + \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - t^2(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - t^2(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - 2\sqrt{\varepsilon}t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + 2\sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t}{-t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2} \\
 C(\varepsilon, t) &= \frac{1}{2} \frac{((e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - 1)(2t + t^2 + 1)\sqrt{\varepsilon}e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}}{-t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2} \\
 D(\varepsilon, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})}(1 + 2t + t^2 + t^2(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + 2t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2)}{-t(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 t - (e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 + \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - (e^{(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}})})^2 - \sqrt{\varepsilon}(e^{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})})^2}
 \end{aligned}$$

5.5.2 Pénalisation en domaine variable pour Stokes

Soit O un ouvert de \mathbb{R}^n (en pratique $n = 2$ ou 3) et Ω_t une famille d'ouverts vérifiant $\overline{\Omega_t} \subset O$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. On suppose que les ouverts Ω_t se déforment de façon \mathcal{C}^∞ avec le temps. On note $U_t = O \setminus \Omega_t$.

Nous n'étudierons pas ici l'erreur des approximations faites, le lecteur se référera à la référence [14] pour en adapter l'étude à ce problème. Pour ce faire, il faut utiliser la fonction ψ définie ci-après. Pour tout $x \in O \setminus \Omega_t$, on pose $\psi(x, t) = d(x, \partial\Omega_t)$. On suppose $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ en (x, t) . ψ vérifie les propriétés suivantes : $|\nabla_x \psi| = 1$ sur $U(t)$, et sur $\partial\Omega_t$, $\nabla \psi = n$ et $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 1$. Cette fonction permet de définir la couche limite et est la base des estimations d'erreur. Ces estimations sont en cours de réalisation au moment de la rédaction de ce manuscrit.

Ecriture des équations

Partons de l'équation de Stokes écrite sur les Ω_t ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla P = 0 & \text{sur } \Omega_t \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{sur } \Omega_t \\ u(x, t) = u_b(x, t) & \text{sur } \partial\Omega_t \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

En translatant u en $v = u - u_b$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v + \nabla P = -\frac{\partial u_b}{\partial t} + \mu \Delta u_b & \text{sur } \Omega_t \\ \operatorname{div}(v) = -\operatorname{div}(u_b) & \text{sur } \Omega_t \\ v(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t \\ v(x, 0) = v_0(x) = u_0(x) + u_b(x, 0) & \text{sur } \Omega_0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

On peut maintenant effectuer une pénalisation sur v et travailler sur tout O ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta v_\epsilon + \nabla P_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{1}_{U_t} v_\epsilon = -\frac{\partial u_b}{\partial t} + \mu \Delta u_b & \text{sur } O \\ \operatorname{div}(v_\epsilon) = -\operatorname{div}(u_b) & \text{sur } O \\ v_\epsilon(x, t) = 0 & \text{sur } \partial O \\ v_\epsilon(x, 0) = v_0(x) & \text{sur } O \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Il faut prolonger u_b sur U_t de façon à "forcer" v_ϵ à être nulle sur U_t . Ainsi le prolongement par 0 est le plus adapté. On fait de même avec u_0 . On se retrouve donc en découpant O , avec les équations ci-dessous. On a noté $w_\epsilon = v_\epsilon|_{\Omega_t}$, $p_\epsilon = P_\epsilon|_{\Omega_t}$, $z_\epsilon = v_\epsilon|_{U_t}$ et $q_\epsilon = P_\epsilon|_{U_t}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta w_\epsilon + \nabla p_\epsilon = -\frac{\partial u_b}{\partial t} + \mu \Delta u_b & \text{sur } \Omega_t \\ \operatorname{div}(w_\epsilon) = -\operatorname{div}(u_b) & \text{sur } \Omega_t \\ w_\epsilon(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t \cap \partial O \\ w_\epsilon(x, 0) = v_0(x) & \text{sur } \Omega_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z_\epsilon}{\partial t} - \mu \Delta z_\epsilon + \nabla q_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} z_\epsilon = 0 & \text{sur } U_t \\ \operatorname{div}(z_\epsilon) = 0 & \text{sur } U_t \\ z_\epsilon(x, t) = 0 & \text{sur } \partial U_t \cap \partial O \\ z_\epsilon(x, 0) = 0 & \text{sur } U_0 \end{array} \right.$$

De plus on a les conditions de recollement, sur $\partial\Omega_t \cap O$:

$$w_\epsilon = z_\epsilon$$

$$-\frac{\partial w_\epsilon}{\partial n} + p_\epsilon \cdot n = -\frac{\partial z_\epsilon}{\partial n} + q_\epsilon \cdot n$$

La deuxième égalité provient de la formulation faible des deux équations ci-dessus qui ont des termes de bord sur $\partial\Omega_t$. Or ces termes de bords doivent se compenser, $\partial\Omega_t$ n'étant pas un bord de l'équation globale.

Simulations numériques

On travaille avec l'équation (5.16). Les différentes étapes de la simulation sont les mêmes que dans les parties précédentes, c'est pourquoi elles ne sont décrites que succinctement. Pour plus de détails, voir le chapitre 5.4.

Etape 1 : élimination du terme dérivé en temps

On intègre de t_n à t_{n+1} , cette fois-ci il n'y a pas de terme en gradient à éliminer, donc il n'y a pas de courbes caractéristiques (en fait elles sont réduites à un point) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} - \mu \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta v_\epsilon + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla P_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \int_{t_n}^{t_{n+1}} 1_{U_t} v_\epsilon = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -\frac{\partial u_b}{\partial t} + \mu \Delta u_b$$

En notant $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, on approche les intégrales en temps de cette égalité par la méthode des rectangles,

$$v_\epsilon(x, t_{n+1}) - v_\epsilon(x, t_n) - \Delta t \cdot \mu \Delta v_\epsilon(x, t_{n+1}) + \Delta t \cdot \nabla P_\epsilon(x, t_{n+1})$$

$$+ \frac{\Delta t}{\epsilon} 1_{U_{t_{n+1}}} v_\epsilon(x, t_{n+1}) = u_b(x, t_n) - u_b(x, t_{n+1}) + \Delta t \cdot \mu \cdot \Delta u_b(x, t_{n+1})$$

Etape 2 : réécriture en vue de la discrétisation par éléments finis de Whitney :

On utilise l'égalité $\Delta(k) = \nabla(\text{div}(k)) - \text{rot}(\text{rot}(k))$ et $\text{div}(v_\epsilon) = -\text{div}(u_b)$. On obtient alors le système suivant :

$$v_\epsilon(x, t_{n+1}) - v_\epsilon(x, t_n) + \Delta t \cdot \mu \cdot \text{rot}(\text{rot}(v_\epsilon))(x, t_{n+1}) + \Delta t \cdot \nabla P_\epsilon(x, t_{n+1})$$

$$+ \frac{\Delta t}{\epsilon} 1_{U_{t_{n+1}}} v_\epsilon(x, t_{n+1}) = u_b(x, t_n) - u_b(x, t_{n+1}) - \Delta t \cdot \mu \cdot \text{rot}(\text{rot}(u_b))(x, t_{n+1})$$

En posant $k^n = k(\cdot, t_n)$ et en utilisant des fonctions intermédiaires pour exprimer les rotationnels :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_b^{n+1} = \text{rot}(u_b^{n+1}) \\ w_\epsilon^{n+1} = \text{rot}(v_\epsilon^{n+1}) \\ (1 + \frac{\Delta t}{\epsilon} 1_{U_{t_{n+1}}})v_\epsilon^{n+1} + \Delta t \cdot \mu \cdot \text{rot}(w_\epsilon^{n+1}) + \Delta t \cdot \nabla P_\epsilon^{n+1} = u_b^n - u_b^{n+1} - \Delta t \cdot \mu \cdot \text{rot}(w_b^{n+1}) + v_\epsilon^n \\ \text{div}(v_\epsilon^{n+1}) = -\text{div}(u_b^{n+1}) \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Etape 3 : formulation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega w_b^{n+1} f = \int_\Omega \text{rot}(u_b^{n+1}) f \quad \forall f \in L^2(\Omega) \\ \int_\Omega w_\epsilon^{n+1} f = \int_\Omega \text{rot}(v_\epsilon^{n+1}) f \quad \forall f \in L^2(\Omega) \\ \left[\begin{array}{l} \int_\Omega (1 + \frac{\Delta t}{\epsilon} 1_{U_{t_{n+1}}}) v_\epsilon^{n+1} z + \Delta t \cdot \mu \cdot \int_\Omega \text{rot}(w_\epsilon^{n+1}) z + \Delta t \cdot \int_\Omega \nabla P_\epsilon^{n+1} z \\ + \Delta t \cdot \mu \cdot \int_\Omega \text{rot}(w_b^{n+1}) z = \int_\Omega u_b^n z - \int_\Omega u_b^{n+1} z + \int_\Omega v_\epsilon^n z \end{array} \right. \quad \forall z \in H_\perp^1(\Omega) \\ \text{div}(v_\epsilon^{n+1}) = -\text{div}(u_b^{n+1}) \end{array} \right. \quad (5.18)$$

A noter que l'équation des divergences est encore conservée au sens fort.

Etape 4 : mise en place du système linéaire :

On discrétise les inconnues dans les différents espaces, ainsi

- $w_b^n \in L^2(\Omega) \longrightarrow W_b^n \in W^0$
- $w_\epsilon^n \in L^2(\Omega) \longrightarrow W_\epsilon^n \in W^0$
- $u_b^n \in H^1(\Omega) \longrightarrow U_b^n \in W^1$
- $v_\epsilon^n \in H_\perp^1(\Omega) \longrightarrow V_\epsilon^n \in W_0^1$
- $P_\epsilon^n \in L^2(\Omega) \longrightarrow \bar{P}_\epsilon^n \in W^2$
- $z \in H_\perp^1(\Omega) \longrightarrow Z \in W_0^1$
- $f \in L^2(\Omega) \longrightarrow F \in W^0$

Les termes de la formulation variationnelle des équations 5.18 se discrétisent avec les matrices définies dans les parties précédentes, mais il en apparaît aussi une nouvelle définie par :

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\epsilon} 1_{U_{t_{n+1}}} \times v_{\epsilon}^{n+1} . z = \sum_{a,b \in \mathcal{A}_0} V_{\epsilon,a}^{n+1} Z_b \frac{\Delta t}{\epsilon} \int_{\Omega} 1_{U_{t_{n+1}}} \times w_a . w_b = \frac{\Delta t}{\epsilon} . {}^t Z C_{00}^{n+1} V_{\epsilon}^{n+1}$$

Finalement, le système linéaire s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t F M_{11} W_b^{n+1} = {}^t F R_{11} U_b^{n+1} + {}^t F B_{11} U_b^{n+1} \\ F \in \mathbb{R}^N, W_b^{n+1} \in \mathbb{R}^N, U_b^{n+1} \in \mathbb{R}^A \\ \\ {}^t F M_{11} W_{\epsilon}^{n+1} = {}^t F R_{10} V_{\epsilon}^{n+1} \\ F \in \mathbb{R}^N, W_{\epsilon}^{n+1} \in \mathbb{R}^N, V_{\epsilon}^{n+1} \in \mathbb{R}^{A_0} \\ \\ \left[\begin{array}{l} {}^t Z A_{00} V_{\epsilon}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\epsilon} . {}^t Z C_{00}^{n+1} V_{\epsilon}^{n+1} + \Delta t . \mu ({}^t Z^t R_{01} W_{\epsilon}^{n+1} + {}^t Z^t R_{01} W_b^{n+1}) - \Delta t . {}^t Z G_{00} \bar{P}_{\epsilon}^{n+1} \\ = {}^t Z A_{01} U_b^n - {}^t Z A_{01} U_b^{n+1} + {}^t Z A_{00} V_{\epsilon}^n \end{array} \right. \\ \bar{Z} \in \mathbb{R}^{A_0} \\ \\ \mathcal{D}_{00} V_{\epsilon}^{n+1} = -\mathcal{D}_{01} U_b^{n+1} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Soit matriciellement,

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & -R_{10} & 0 \\ \Delta t \mu {}^t R_{01} & \Delta t \mu . {}^t R_{01} & A_{00} + \frac{\Delta t}{\epsilon} . C_{00}^{n+1} & -\Delta t . G_{00} \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{00} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_b^{n+1} \\ W_{\epsilon}^{n+1} \\ V_{\epsilon}^{n+1} \\ \bar{P}_{\epsilon}^{n+1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (R_{11} + B_{11}) U_b^{n+1} \\ 0 \\ A_{01} (U_b^n - U_b^{n+1}) + A_{00} V_{\epsilon}^n \\ -\mathcal{D}_{01} U_b^{n+1} \end{pmatrix}$$

Remarques :

Un des intérêts principaux de cette méthode réside dans le fait que le maillage peut être cartésien, et donc facile à gérer informatiquement. Toutefois, le calcul de la matrice C_{00}^n reste assez difficile car on a besoin de déterminer l'intersection de U_t avec le maillage à chaque pas de temps, ce qui est de plus coûteux en temps de calcul. Néanmoins, pour des transformations géométriques plus complexes que des homothéties, cette méthode sera plus facilement implémentable. L'équation à résoudre sera en effet toujours la même, seule la définition de 1_{U_t} changera.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Le caractère interdisciplinaire de cette thèse peut être résumé par la phrase suivante : nous utilisons des outils mathématiques afin d'étudier des phénomènes physiques dans une structure vivante, le poumon humain. La complexité de ce système a nécessité l'utilisation de modèles relativement simples afin d'extraire un à un les paramètres intéressants et de comprendre leur influence. Ainsi, nous avons voulu déterminer comment la géométrie pouvait influencer la structure des flux. Nos premiers résultats ont mis en évidence la nécessité d'une régulation active de ces flux sous peine d'une distribution inhomogène marquée (multifractale à la limite). Puis, nous nous sommes aperçus que la composante respiratoire avait des conséquences importantes, en particulier, que les flux inspiratoires et expiratoires sont très différents. Nos observations ont corroboré une hypothèse médicale soutenant que la structure d'arbre des poumons est une géométrie qui facilite l'expiration plutôt que l'inspiration. Toutes ces premières conclusions sont la conséquence des effets inertiels du fluide dans les premières générations de l'arbre pulmonaire. Une question issue de la théorie de l'Evolution peut alors être soulevée : "dans quelle mesure la géométrie du poumon s'est-elle adaptée aux flux?"

Nous avons ensuite observé, grâce à l'exemple du poumon, que si les êtres vivants sont bien adaptés aux lois de la physique, ils ont aussi, dans certains cas, comme l'arbre bronchique, une protection à la variabilité anatomique basée sur l'existence de marges de sécurité. Ainsi, la présence d'une telle marge dans le poumon lui assure la plupart du temps une résistance hydrodynamique raisonnable, que ce soit dans le cadre de variabilités interindividuelles ou dans le cadre de variabilités d'un poumon au cours de la vie d'un individu. La présence de marges a aussi été illustré dans la référence [44] par l'intermédiaire de l'effet de *screening* existant dans les acinus. La détermination des zones de transition convection-diffusion, dépendant du moment du cycle respiratoire et du régime (repos ou exercice), permettra une meilleure évaluation de l'efficacité de la surface d'échange et une comparaison des données morphologiques avec les résultats numériques obtenus dans des modèles d'acinus.

A long terme, ce travail s'inscrit dans le cadre du projet « poumon numérique » développé par les physiciens Bernard Sapoval et Marcel Filoche. Le but de ce type d'études est de disposer d'un outil de test adaptatif et fiable, complétant avantageusement les expérimentations *in vivo* qui sont limitées soit par des considérations expérimentales soit

par des considérations d'éthique et de réglementation médicales. La souplesse d'un tel modèle permettrait de mieux comprendre le retentissement physiologique de pathologies structurales. Ce travail, dont cette thèse et celle de M. Felici [19] constituent les bases, passe par une meilleure compréhension des relations entre la géométrie et la distribution des flux pour extraire les paramètres physiques appropriés. Les travaux qu'il reste à effectuer peuvent se décomposer en étapes "élémentaires" décrites ci-dessous.

Les phénomènes d'inertie en régime non stationnaire

La poursuite des calculs en régime non stationnaire permettra de préciser les conséquences du cycle respiratoire. La différence structurale observée entre les flux inspiratoires et expiratoires devra encore être précisée. Le but étant de répondre à une question fondamentale et non résolue en physiologie du poumon : le poumon est-il mieux fait (du point de vue physique) pour l'absorption de l'oxygène ou pour le rejet du gaz carbonique ? Autrement dit a-t-il une vocation plutôt inspiratoire ou plutôt expiratoire ? De nouvelles simulations, plus orientées, pourraient de plus permettre de mieux comprendre la fonction du muscle lisse bronchique, qui est encore très controversée aujourd'hui.

Dans le même esprit, en complément du calcul déjà effectué sur le poumon informatique de H. Kitaoka [30], des simulations dans des structures réalistes sont prévues. Des reconstructions 3D de poumons humains (normaux ou pathologiques) ont été effectuées par les équipes de Philippe Grenier (Service de Radiologie, la Pitié Salpêtrière) et de Françoise Préteux (Institut National des Télécommunications, membre de l'unité de projets ARTEMIS). Ces reconstructions sont issues de coupes obtenues au scanner chez des patients souffrant de divers types d'affections respiratoires. Une collaboration est prévue pour mesurer l'effet des pathologies sur la répartition des flux. Les apports de cette association seront doubles : du point de vue médical, certaines maladies pulmonaires seront mieux comprises, et du point de vue « poumon numérique », l'étude du flux dans des poumons pathologiques et la comparaison avec des poumons normaux mettront en évidence les paramètres structurels importants qui permettent le bon fonctionnement de cet organe.

Faire respirer l'acinus

Les travaux de l'équipe de Bernard Sapoval sur la diffusion dans les acinus en régime stationnaire a mis en évidence un effet d'écrantage de la structure qui a des conséquences dans certaines pathologies comme l'œdème pulmonaire. L'influence du terme temporel reste toutefois encore inconnu et faire respirer numériquement un acinus en faisant varier son volume peut mener à des conclusions intéressantes. Les calculs des flux ont déjà été effectués par un code de simulation numérique en géométrie variable (méthode par changement de variable), il reste maintenant à coupler ces flux avec les phénomènes de diffusion de l'oxygène et du dioxyde de carbone. La compréhension de la physique du problème reste à faire, en particulier l'obtention d'une bonne définition du nombre de Péclet acinaire est indispensable.

A noter, que nous sommes en train de développer une seconde méthode, basée sur la

théorie de la pénalisation. Elle va être mis au point en collaboration avec Didier Bresch (LMC, Grenoble). Cette méthode complètera avantageusement le code déjà programmé.

Le transport des particules

La connaissance des cartes de vitesses dans des modèles de poumons théoriques ou réalistes permet d'étudier facilement le mouvement de particules qui sont captées en entrée. Nous avons déjà effectué quelques simulations en régime stationnaire et observé l'existence de zones préférentielles de dépôts, voire d'emprisonnement. Ces zones dépendent des masses des particules. Des simulations plus poussées, en particulier en régime non stationnaire sont envisagées. L'équipe de L. Desvilletes (CMLA, ENS Cachan) travaille sur les mouvements et les transformations (divisions, recollements, ...) des gouttelettes dispersées dans un gaz et une collaboration pour une modélisation réaliste des sprays en milieu pulmonaire est envisagée. Il existe de nombreuses applications à ce problème, que ce soit en terme de sensibilité à la pollution (goudrons par exemple) mais aussi dans la médication par spray, pour traiter certaines pathologies pulmonaires comme l'asthme. Plus récemment, on a constaté que la zone d'échange pulmonaire représentait un excellent moyen de diffuser des produits dans tout le corps par l'intermédiaire du sang. Ainsi, on envisage d'utiliser le poumon comme vecteur de certaines thérapies géniques. Le besoin d'informations précises sur les chemins parcourus par des particules inhalées est donc réel.

Simulations en régime respiratoire d'exercice

Quand les besoins en oxygène augmentent, le rythme respiratoire s'accélère et les vitesses de l'air dans les poumons deviennent très importantes, créant de la turbulence. La répartition des flux va être bouleversée et un effet de mixage très important se produira. Quelles en sont les conséquences ? La géométrie des poumons tient-elle compte de ces phénomènes ou bien compte-elle simplement sur un mélange suffisamment important pour que toutes les zones soient aérées ? La simulation numérique de ces phénomènes plus complexes, mérite donc d'être abordée.

Associer les différents niveaux de modélisation

Le poumon a été modélisé par un découpage en plusieurs parties : une première soumise à l'inertie du fluide, une seconde soumise à un flux de Poiseuille et une troisième où le flux de Poiseuille est associé à des phénomènes de diffusions, dans le gaz alvéolaire et entre ce gaz et le sang. Après avoir compris l'influence de la zone de transition convection-diffusion, il faudra « recoller » ces différentes couches de modélisations pour obtenir une structure globale qui constituera une synthèse complète d'un « poumon numérique ». Les principales difficultés, mathématiques et numériques, se situent au niveau des conditions aux bords à imposer aux interfaces des différents modèles.

Finalement ...

Le “poumon numérique” est un projet très prometteur. Déjà bien entamé, il a at-

teint une maturité suffisante pour être prolongé par des applications pratiques à court terme, en particulier en ce qui concerne les calculs des flux et l'étude des particules dans des géométries réalistes. Ce travail reflète l'importance des travaux interdisciplinaires. Ils permettent des avancées dans des domaines où la maîtrise de plusieurs sujets est indispensable. Ces connaissances pluridisciplinaires sont rarement disponibles chez une même personne. Seules des collaborations resserrées permettent de disposer de garde-fous empêchant un décalage trop important entre réalité et modèles.

Annexe A

Considérations techniques sur les modèles géométriques

Cette annexe présente les choix des géométries et les méthodes de calculs du chapitre 3. Nous y utilisons des structures dont la construction a nécessité une étude géométrique, principalement pour la construction des branchements. La description initiale est une structure filaire que l'on habille ensuite avec des cylindres. Compte tenu de leur épaisseur, ces cylindres ne peuvent avoir des longueurs identiques au modèle filaire. Le calcul de ces longueurs fait appel aux notions de base de la géométrie. Ensuite le modèle géométrique des bifurcations est présenté, la principale difficulté est qu'il passe par une réindexation des sommets des bases des cylindres.

Cette annexe décrit aussi les différentes étapes des calculs, depuis l'obtention de la géométrie jusqu'à la visualisation. Les programmes sont tous écrits en *C++* exceptés les programmes utilisateurs de N3S, qui sont écrits en Fortran.

A.1 Paramètres géométriques des branches et pistons

Les modèles utilisés dans le chapitre 3, ont des dimensions dont les ordres de grandeur sont réalistes avec le poumon. Ainsi le diamètre de la branche de première génération est de 2 *cm* et les diamètres suivants décroissent en $\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}} \sim 0.79$ avec la génération : le diamètre de la deuxième génération vaut ainsi 1.58 *cm* et celui de la troisième vaut 1.24 *cm*. Cette décroissance a été observée par E.R. Weibel [63], le chapitre 4 étudie les causes et conséquences de cette réduction. La longueur des tubes est liée à un paramètre d'étude de nos modèles, à savoir le rapport longueur sur diamètre L/D , qui est supposé constant dans tout l'arbre. Les valeurs étudiées sont $L/D = 2.5, 3, 3.5$ et 4. Les branchements sont supposés être coplanaires et l'angle entre les deux branches filles est fixé à 90° . Le dernier paramètre est l'angle α entre les deux plans de branchement de nos arbres, limités à trois générations pour des raisons de temps de calcul. C'est un paramètre d'étude du chapitre 3, les différentes valeurs traitées sont $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et 90° . L'angle $\alpha = 0^\circ$ correspond à un arbre coplanaire.

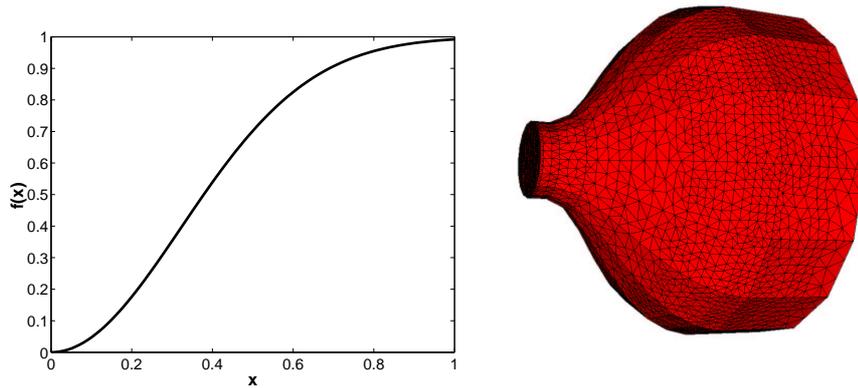


FIG. A.1 – Construction des pistons. A gauche le profil unidimensionnel utilisé, à droite le piston obtenu après rééchelonnage et symétrie de révolution.

Du point de vue de la discrétisation de la géométrie, les branches sont des cylindres de bases polygonales, la plupart du temps à seize côtés. La construction géométrique du branchement s’appuie sur ces polygones et plus particulièrement sur la condition de divisibilité par quatre du nombre de leurs sommets, voir la partie suivante.

Les pistons évasés fixés à la base des arbres, voir chapitre 3, sont fabriqués par symétrie de révolution. On choisit une fonction de forme, comme par exemple sur la figure A.1, qui est dilatée afin d’obtenir des dimensions cohérentes avec le reste de la structure. Puis, par révolution, on crée le volume. A noter que l’on discrétise aussi l’opération de révolution, si bien que les pistons sont des structures formées de polygones à seize côtés.

A.2 Modélisation des branchements

A.2.1 Passage du modèle filaire au modèle 3D

Les données initiales de l’arbre sont des longueurs, des diamètres et des points. L’habillage de cette structure filaire par des cylindres n’est pas évidente et on doit faire un peu de géométrie élémentaire pour savoir comment les construire. Il n’est pas possible que les trois cylindres se touchent. Nous avons donc choisi de faire se toucher les cylindres des branches filles (branches 2 et 3 sur la figure A.2) et que la branche-fille de diamètre le plus grand touche la branche-mère. Cette configuration est montrée en coupe le long du plan de branchement sur la figure A.3. Dans cet exemple, on veut que les branches-filles se touchent en C . La branche-mère descendra ensuite jusqu’à l’ordonnée du point B , point le plus “haut” sur l’axe des y . A noter que cette configuration n’est pas exactement la configuration utilisée pour des raisons de réalisme, vois ci-dessous.

Les inconnues du problème sont définies sur la figure A.3. On cherche à exprimer h_2 et h_3 , ainsi que h_1 (qui vaut y_B dans le cas présenté sur la figure). A partir de ces nombres, nous pourrions construire les cylindres. D’abord on veut calculer les expressions

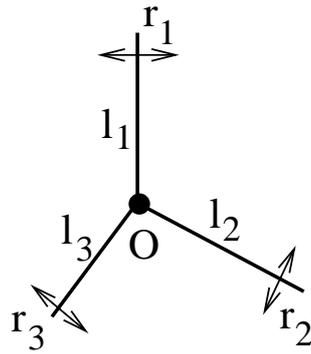


FIG. A.2 – On part de trois segments donc on connaît les longueurs, on veut les habiller avec des cylindres de rayons imposés. l_1 , l_2 et l_3 sont les longueurs des branches, r_1 , r_2 et r_3 sont les rayons des cylindres souhaités. A noter que l'on suppose que l'arbre branche de façon coplanaire comme dans les poumons, ce qui facilite les calculs.

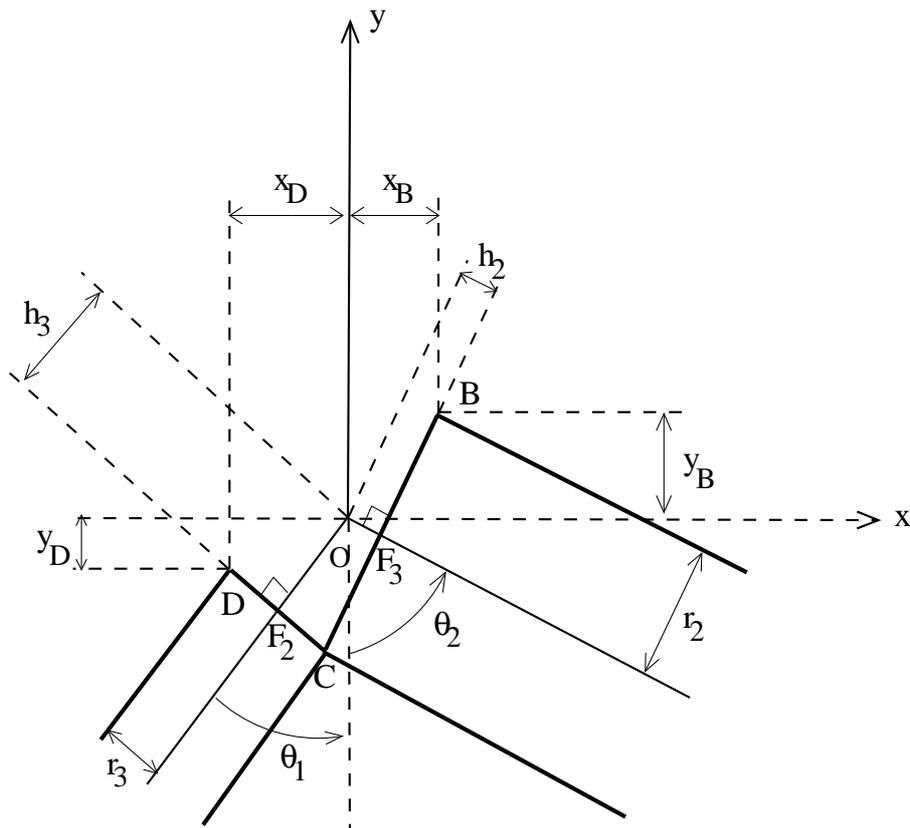


FIG. A.3 – Définitions des différentes grandeurs dans une coupe des cylindres (traits en gras) dans le plan de branchement. Les branches filles sont tangentes en C tandis que la branche mère touchera la branche numéro 2 en B .

de h_2 et h_3 en fonction des données du problème, pour cela on utilise les théorèmes ancestraux de Pythagore et d'Al Kaschi (pour les nostalgiques, voir figure A.3 : on applique Pythagore dans (OCF_1) et (OCF_2) et Al Kaschi dans (OF_2F_3) et (F_2F_3C)), ce qui mène à

$$\begin{cases} h_2 = \frac{r_3 + \cos(\theta_1 + \theta_2)r_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ h_3 = \frac{r_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2)r_3}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases}$$

Ensuite, il reste à calculer h_1 , qui correspond à l'ordonnée d'un point parmi B et D : celui qui est le plus élevé sur l'axe des y (voir figure A.3). Pour cela on a besoin de calculer les coordonnées de B et D dans le plan.

$$\begin{cases} x_B = h_2 \sin(\theta_2) + r_2 \cos(\theta_2) \\ y_B = -h_2 \cos(\theta_2) + r_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = -h_3 \sin(\theta_1) - r_3 \cos(\theta_1) \\ y_D = -h_3 \cos(\theta_1) + r_3 \sin(\theta_1) \end{cases}$$

On choisit finalement h_1 en fonction des ordonnées des points B et D

$$h_1 = \max(y_B, y_D)$$

L'application de ces résultats se fait de la façon suivante : on construit les cylindre relativement au milieu des branches. Ainsi le cylindre de la branche-mère est décomposé en deux demi-cylindre. Celui du haut a sa longueur définie par le branchement du dessus et celui du bas a une longueur qui vaut $l_1/2 - h_1$. Les deux branches filles 2 et 3 sont gérées de la même façon, excepté que ce sont leurs demi-cylindres hauts dont les longueurs sont ficée respectivement à $l_2/2 - h_2$ et $l_3/2 - h_3$.

Néanmoins, quelques modifications de ces nombres doivent encore être effectuées pour améliorer le réalisme et gérer certains cas particuliers. D'abord, si le rayon de la branche mère est trop grand, on ne peut raisonnablement utiliser directement la grandeur h_1 , car la branche fille de plus grand rayon rencontrera la branche mère à l'intérieur de la section du bas du cylindre (dans l'exemple figure A.3, cela signifie que le point B se retrouve "au milieu" de la base de la branche mère). Une telle situation, irréaliste, nuirait à la circulation du flux, il faut donc augmenter sensiblement h_1 (en général, un facteur empirique de l'ordre de 1.2 a été choisi). Ensuite, la condition de tangence des cylindres des branches 2 et 3 n'est pas forcément bonne car cela crée des angles très aigus à l'origine de singularités dans la simulation numérique des flux. Ainsi, pour adoucir le branchement, on choisit en général des h_2 et h_3 un peu plus grands que ceux trouvés ci-dessus (nous les avons multipliés par un facteur 1.2). Cela permet aussi de gérer plus facilement la construction de l'intersection décrite dans la partie suivante.

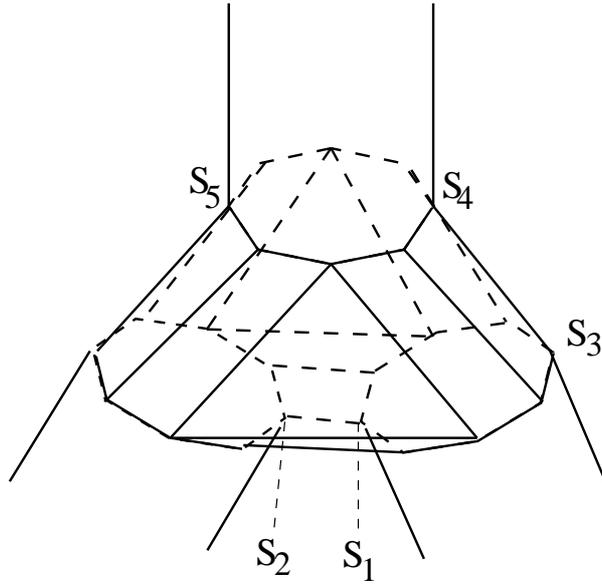


FIG. A.4 – Construction de la géométrie du branchement ($N = 8$). On relie les sommets des polygones par des segments de droites.

A.2.2 Construction géométrique d'un branchement

Une fois les propriétés des cylindres déterminées, il reste à construire la géométrie du branchement. Nous allons utiliser des segments qui

- relient entre eux les sommets de la base inférieure de la branche mère aux sommets des bases supérieures des branches filles.
- relient les sommets des bases supérieures des deux branches filles.

Cela crée des faces à trois ou quatre côtés, pas forcément coplanaires, mais ce n'est pas une difficulté car le mailleur Simail gère ce type de face.

Maintenant nous allons décrire la construction du branchement, à suivre sur la figure A.4. Notons P_M le polygone formant la base inférieure de la branche mère. Puis notons P_1 et P_2 les polygones formant les bases supérieures des branches filles. L'idée est de sélectionner les sommets S_1 et S_2 les plus proches, S_1 étant choisi sur P_1 et S_2 sur P_2 . Ces deux points seront alors reliés par un segment. Puis, le nombre de côtés N des polygones étant multiple de 4, on relie les $N/4$ sommets de part et d'autre des points S_1 et S_2 . Ensuite, on note S_3 le sommet opposé à S_1 sur P_1 . On appelle S_4 le sommet du polygone P_M étant le plus proche de S_3 . On relie S_3 et S_4 par un segment, ainsi que les $N/2$ points de part et d'autre. On note ensuite S_5 le sommet opposé à S_4 sur P_M . On le relie au sommet opposé à S_2 sur P_2 , ainsi que les $N/4$ sommets de part et d'autre. La structure obtenue est formée de $3N/2$ faces à quatre côtés et de 2 faces à trois côtés.

Cette méthode de construction est particulièrement adaptée à des arbres branchant de façon symétrique. Dans le cas où le branchement est dissymétrique, il existe des cas où certaines faces (à quatre côtés) sont trop étroites pour le mailleur, cette face est alors associée à une de ses voisines, créant une face à six côtés, non coplanaire, que le mailleur sait en général gérer. A partir des faces, on peut alors créer un maillage bidimensionnel de la surface de l'arbre grâce au mailleur Simail. Puis, à partir de ce maillage de surface, il crée un maillage du volume. La principale méthode utilisée pour mailler est la méthode de Voronoï [53].

A.3 Un peu d'informatique

Dans cette partie, nous allons décrire schématiquement le traitement d'un problème typique du chapitre 3, depuis la préparation du calcul jusqu'à la visualisation et la gestion des résultats.

La numérotation séquentielle des branches d'un arbre dichotomique est un des outils les plus importants de ce travail. Elle est à la base des étapes numéro 1 et 2 présentées ci-dessous. Cette numérotation est décrite par la figure A.5, elle consiste à numérotter les branches en descendant dans l'arbre le long d'un chemin. Une fois arrivé à une extrémité, on remonte le chemin parcouru jusqu'à trouver un branchement ayant une branche fille non déjà numérotée. On continue alors la numérotation des branches en redescendant l'arbre depuis cette branche fille jusqu'à une extrémité. Puis on recommence à monter. Cette méthode est celle utilisée par H. Kitaoka dans son logiciel de modélisation du poumon [30].

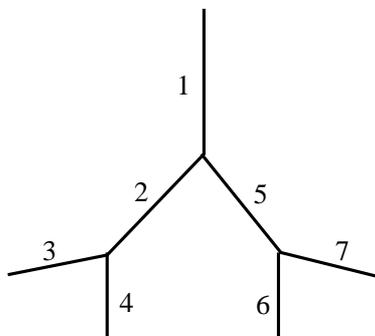


FIG. A.5 – Exemple de numérotation séquentielle des branches d'un arbre dichotomique.

Les méthodes de traitements informatiques sont constituées d'une succession d'étapes élémentaires :

1. Obtention d'un fichier de donnée des branches (extension ".doc"), décrit comme une succession de paramètres : numéro, diamètre et longueur de la branche, ainsi que les coordonnées des extrémités. Le redimensionnement de certains paramètres des arbres est géré par des programmes (longueur des branches et angle entre plans

de branchement). Le logiciel de construction de modèle de poumon écrit par H. Kitaoka a été modifié pour sortir un fichier de données “.doc”.

2. A partir du fichier obtenu à l'étape précédente, la description de la géométrie en terme de points, lignes et faces (à trois, quatre et seize côtés) est effectuée et convertie en format Simail (extension “.dat”).
3. Le logiciel Simail maille la surface, puis le volume de l'arbre. A la sortie, nous disposons d'un fichier de maillage formé de tétraèdres (extension “.des”).
4. Le logiciel N3S est ensuite utilisé, il est alimenté du fichier “.des” écrit par Simail, des différentes conditions aux bords à imposer (par l'intermédiaire de fichiers utilisateurs, écrits en fortran). C'est l'étape la plus longue, car c'est celle du calcul numérique.
5. A la sortie, N3S donne des fichiers “.case” lisibles par le visualisateur 3D Ensight 7 (à l'origine de toutes les images du chapitre 3). Ce visualisateur a aussi la capacité de traiter ou d'exporter les résultats calculés lors de l'étape 4.

Cette méthode est systématiquement utilisée pour tous les calculs du chapitre 3. A noter que Simail, N3S et Ensight est une chaîne de logiciels commercialisée par Simulog.

Annexe B

Existence, unicité et propriétés de la solution des équations 5.2

Dans cette partie nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour démontrer l'existence d'une solution. Cette méthode consiste en l'obtention d'approximations successives dans des espaces de dimensions finies qui s'emboîtent les uns dans les autres jusqu'à remplir à la limite tout l'espace de travail. Les approximations convergent alors vers la solution. Ce travail s'effectue en plusieurs étapes, tout d'abord on définit les espaces d'approximations V_m , puis on calcule les solutions approchées $u_m \in V_m$ de l'équation. Ensuite il faut montrer que ces approximations convergent, puis qu'elles convergent bien vers la solution de l'équation. Pour cette étape, dite d'estimation, des inégalités sont utilisées et la compacité faible est le principal argument de convergence. Une fois l'existence prouvée, ces estimations permettent d'en apprendre plus sur la solution, en particulier de montrer qu'elle est unique et d'obtenir des informations sur sa régularité.

La plupart des étapes sont démontrées exceptés quelques points plus techniques, qui sont alors accessibles dans la référence [50].

B.1 Notations

Nous allons d'abord travailler sur la version homogène de l'équation 5.2 avec second membre, rappelée ci-dessous. On note $Q =]0, T_m[\times \Omega$ où T_m est un réel strictement positif et Ω est un ouvert régulier et borné de \mathbb{R}^d .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [x \cdot \nabla u] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u + \frac{1}{k(t)} \nabla P = f & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{sur } Q \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{sur }]0, T_m[\times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω , indéfiniment dérivables et à supports compacts dans Ω . On pose :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{v \in \mathcal{D}(\Omega)^d \mid \operatorname{div}(v) = 0\} \\ V &= \overline{\mathcal{V}}^{H^1(\Omega)} \\ H &= \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

V est un espace de Hilbert séparable, donc il existe une partie dénombrable dense dans V , libre. Notons cette suite $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ainsi, les espaces d'approximation utilisés dans la méthode de Galerkin peuvent être définis :

$$V_m = \langle (w_i)_{i=1, \dots, m} \rangle$$

B.2 Construction de l'approximation de la solution dans V_m

Supposons connue une suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C(0, T_m; L^2(\Omega)^d)$ telle que $f_m \rightarrow f$ dans $L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega)^d)$. L'idée est de chercher une approximation de la solution dans les espaces de dimensions finies V_m , ainsi on cherche

$$t \rightarrow u_m(t, \cdot) = \sum_{k=1}^m u_m^k(t) w_k \in C^1(0, T_m; V_m)$$

qui vérifie la formulation faible de l'équation B.1, c'est à dire $\forall v \in V_m$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} v - \frac{k'(t)}{k(t)} \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_m) v - \frac{\mu}{k^2(t)} \int_{\Omega} \Delta u_m v + \frac{1}{k(t)} \int_{\Omega} \nabla P v = \int_{\Omega} f v$$

Comme V est la fermeture au sens $H^1(\Omega)$ de \mathcal{V} , on en déduit que $\operatorname{div}(v) = 0$ au sens faible pour tout $v \in V$. Ainsi en appliquant la formule de Stokes à l'équation ci-dessus, le terme en pression disparaît, et on obtient un système linéaire sur les coordonnées des fonctions dans l'espace V_m . On décompose v sous la forme $v = \sum_i v_i w_i \in V_m$, notons

$$W = \left(\int_{\Omega} w_i w_j \right)_{ij}, \quad W_x = \left(\int_{\Omega} (x \cdot \nabla w_i) w_j \right)_{ij}$$

$$W_G = \left(\mu \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j \right)_{ij}, \quad F = \left(\int_{\Omega} f w_i \right)_i$$

$$U_m = \begin{pmatrix} u_m^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{pmatrix}$$

En particulier comme les $(w_i)_i$ sont libres, W est une matrice inversible. Le système linéaire s'écrit donc, pour tout $V \in \mathbb{R}^m$

$${}^tVW \frac{dU_m}{dt} - \frac{k'(t)}{k(t)} {}^tV {}^tW_x U_m + \frac{1}{k^2(t)} {}^tV {}^tW_G U_m = F$$

Ceci donne alors une équation différentielle sur U_m

$$\frac{dU_m}{dt} + W^{-1} \left(\frac{1}{k^2(t)} {}^tW_G - \frac{k'(t)}{k(t)} {}^tW_x \right) U_m - W^{-1} F = 0 \quad (\text{B.2})$$

Il faut maintenant utiliser la condition $u(0, x) = u_0(x)$ sur Ω , ainsi $\forall v \in V_m$

$$\int_{\Omega} u_m(x, 0) v(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx$$

ce qui s'écrit encore, pour tout $V = {}^t(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\sum_{ij} u_m^i(0) v_j \int_{\Omega} w_i w_j = \sum_j v_j \int_{\Omega} u_0(x) w_j(x) dx$$

Finalement en posant $U_0 = \left(\int_{\Omega} u_0 w_j \right)_j$, on obtient la condition initiale à associer au système B.2

$$U_m(0) = W^{-1} U_0 \quad (\text{B.3})$$

Ainsi B.2 et B.3 forment une équation différentielle linéaire ordinaire qui vérifie le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il existe donc une unique solution U_m à ce système et cette solution vit dans $C^1(0, T_m)^m$. En particulier cela prouve que $u_m = \sum_{i=1}^m u_m^i w_i \in C^1(0, T_m; V_m)$.

B.3 Estimations & existence

Maintenant que l'on connaît les approximations, il faut montrer que quand $m \rightarrow \infty$, u_m tend vers la solution du système B.1. Tous les calculs effectués dans cette partie vont être effectués avec l'hypothèse que la solution u est dans l'espace $C^1(0, T_m; V)$. Tout d'abord montrons un lemme qui nous servira pour la suite.

Lemme 1 *Soit Ω un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^d et u une fonction de $H_0^1(\Omega)^d$, alors*

$$\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u(x)) \cdot u(x) dx = -\frac{d}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

Preuve :

Remarquons que

$$(x \cdot \nabla u) \cdot u = \sum_i (x \cdot \nabla u_i) \cdot u_i = \sum_{i,j} x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i = \sum_{i,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = \sum_i x \cdot \nabla \left(\frac{u_i^2}{2} \right)$$

Or,

$$\int_{\Omega} x \cdot \nabla \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = \int_{\partial\Omega} (x \cdot \vec{n}) \frac{u_i^2}{2} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(x) \cdot \frac{u_i^2}{2} = -\frac{d}{2} \int_{\Omega} u_i^2$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \cdot u = -\frac{d}{2} \int_{\Omega} \sum_i u_i^2 = -\frac{d}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^d}^2$$

Ce qui prouve le résultat. \square

A l'aide de ce lemme, on peut donc écrire que

$$\int_{\Omega} f \cdot u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u^2 \right) + \frac{k'(t)}{k(t)} \frac{d}{2} \int_{\Omega} u^2 + \frac{\mu}{k^2(t)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad (\text{B.4})$$

Finalement, notons $g(t) = \int_{\Omega} u^2(t, \cdot)$ et $l(t) = \int_{\Omega} f^2(t, \cdot)$ alors

$$\int_{\Omega} f \cdot u \leq \frac{1}{2} (g + l)$$

Donc en remarquant que le terme en $|\nabla u|^2$ est positif, et en posant $a(t) = 1 - \frac{k'(t)}{k(t)} d$, on obtient l'inégalité

$$\frac{dg}{dt}(t) \leq a(t) \times g(t) + l(t)$$

Ce qui s'intègre en l'expression "Gronwallienne", avec $h(t) = \int_0^t l(s) ds + g(0) = \int_0^t \int_{\Omega} f^2(s, \cdot) ds + \left(\int_{\Omega} u^2 \right) (0)$:

$$g(t) \leq h(t) + \int_0^t a(s) g(s) ds$$

Finalement le lemme de Gronwall donne la majoration

$$g(t) \leq h(t) + \int_0^t h(s) \cdot a(s) e^{\int_s^t a(r) dr} ds \quad (\text{B.5})$$

Maintenant tâchons d'appliquer ces résultats aux approximations u_m . Tout d'abord, montrons le lemme suivant.

Lemme 2

$$\int_{\Omega} |u_m(0, x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u_0(x)|^2$$

Preuve :

On a déjà vu que pour tout $V = {}^t(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\sum_j v_j \int_{\Omega} u_m(0, x) w_j(x) = \sum_j v_j \int_{\Omega} u_0(x) w_j(x) dx$$

Ainsi pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\int_{\Omega} u_m(0, x) w_j(x) = \int_{\Omega} u_0(x) w_j(x) dx$$

En multipliant cette dernière égalité par $u_m^j(0)$ et en sommant sur tous les j , on obtient

$$\int_{\Omega} u_m(0, x)^2 dx = \int_{\Omega} u_0(x) u_m(0, x) dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} u_0(x)^2 + \int_{\Omega} u_m(0, x)^2 \right)$$

d'où le résultat. \square

Ainsi en appliquant B.5 à $u_m \in C^1(0, T_m; V)$, il vient

$$\int_{\Omega} u_m^2 \leq h(t) + \int_0^t h(s) \cdot a(s) e^{\int_s^t a(r) dr} ds$$

Or compte tenu du lemme 2, $h(t) \leq \|f\|_{L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega)^d)} + \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|f\|_{L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega)^d)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)^d}$. De plus a est bornée (k ne s'annule pas et est $C^1(0, T_m)$), il existe donc $C > 0$ tel que $|a(t)| \leq C$ pour tout $t \in]0, T_m[$. L'équation ci-dessus montre donc que la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^2(Q)^d$.

Grâce à ce résultat, on peut prouver que $(\nabla u_m)_m$ est lui aussi borné. En effet en repartant de l'équation B.4, avec $u \in C^1(0, T_m; V)$:

$$\frac{2\mu}{k^2(t)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} f^2 + |a| \cdot g + \left| \frac{dg}{dt} \right|$$

Et compte tenu des résultats précédent, en appliquant cette inégalité à u_m , les termes de droite sont tous bornés, donc $(\nabla u_m)_m$ est borné dans $L^2(Q)^{d^2}$.

Ainsi $(u_m)_m$ étant bornée dans $L^2(Q)^d$, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction u dans $L^2(Q)^d$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que u_m converge faiblement. Dans ce cas $(\nabla u_m)_m$ tend vers ∇u dans $\mathcal{D}'(Q)^{d^2}$, or comme $(\nabla u_m)_m$ est borné dans $L^2(Q)^{d^2}$, lui aussi a une sous-suite qui converge faiblement. Quitte à extraire à nouveau, par unicité de la limite, cela montre que ∇u_m tend faiblement vers ∇u dans $L^2(Q)^{d^2}$.

Cette convergence faible permet de passer à la limite dans $\mathcal{D}'(0, T_m)$ quand m tend vers l'infini dans l'expression

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial t} v_m - \frac{k'(t)}{k(t)} \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_m) v_m + \frac{\mu}{k^2(t)} \int_{\Omega} \nabla u_m \cdot \nabla v_m + \int_{\Omega} f v_m$$

En effet Ω étant borné on peut facilement montrer que le terme en $\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_m) v_m$ converge vers $\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) v$. De plus k et k' sont bornés et k ne s'annule jamais. Ainsi, on obtient l'égalité dans $\mathcal{D}'(0, T_m)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v - \frac{k'(t)}{k(t)} \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) v + \frac{\mu}{k^2(t)} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} f v$$

Or on sait d'après les résultats précédents que :

- $\frac{\mu}{k^2} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \in L^2(0, T_m)$
- $-\frac{k'(t)}{k(t)} \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) v \in L^2(0, T_m)$
- $\int_{\Omega} f v \in L^2(0, T_m)$

Cela prouve donc d'abord que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u v \in L^2(0, T_m)$. Finalement :

$$\int_{\Omega} u v \in C(0, T_m)$$

Ensuite, cela montre que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_m \cdot v_m$ tend $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot v$ dans $L^2(0, T_m)$ faible. Donc $\int_{\Omega} u_m \cdot v_m$ tend vers $\int_{\Omega} u \cdot v$ dans $H^1(0, T_m)$ faible. Or l'injection $H^1(0, T_m)$ dans $C(0, T_m)$ est compacte. Cela montre alors que $\int_{\Omega} u_m \cdot v_m$ tend vers $\int_{\Omega} u \cdot v$ fortement dans $C(0, T_m)$. Finalement, on obtient

$$\left(\int_{\Omega} u_m \cdot v_m \right) (0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} u \cdot v \right) (0)$$

Or on a vu que pour tout j , $\int_{\Omega} u_m(x, 0) \cdot w_j = \int_{\Omega} u_0 \cdot w_j$, ce qui donne : pour tout $v_m \in V_m$, $\int_{\Omega} u_m(x, 0) \cdot v_m = \int_{\Omega} u_0 \cdot v_m$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient alors

$$\left(\int_{\Omega} u \cdot v \right) (0) = \int_{\Omega} u_0 \cdot v$$

De plus on peut passer à la limite faible dans $\operatorname{div}(u_m) = 0$ et on obtient $\operatorname{div}(u) = 0$ faible dans $L^2(Q)$. Pour résumer nous avons montré que u vérifie faiblement les première, deuxième et troisième équations du système 5.4. La quatrième condition (solution nulle au bord) est contenue dans les espaces utilisés.

B.4 Existence de la pression

La preuve de l'existence de la pression est basée sur le théorème de Rham, qui donne l'existence de primitives dans un cadre distributionnel. La démonstration n'en sera pas faite ici, voir [50].

Théorème 1 - Théorème de Rham

Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E)^d$ telle que

$$\langle q, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d \text{ telle que } \operatorname{div}(\varphi) = 0$$

Alors il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que $q = \nabla f$.

Pour appliquer ce théorème, il faut remarquer que

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu}{k^2(t)} \Delta u + \frac{k'}{k} x \cdot \nabla u + f \in H^{-1}(Q)^d$$

et que

$$\langle -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu}{k^2(t)} \Delta u + \frac{k'}{k} x \cdot \nabla u + f, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d \text{ telles que } \operatorname{div}(\varphi) = 0$$

Or

Lemme 3

$$H^{-1}(Q)^d \subset H^{-1}(\Omega; L^2(0, T_m))^d + L^2(\Omega; H^{-1}(0, T_m))^d \subset \mathcal{D}'(\Omega; H^{-1}(0, T_m))^d$$

Preuve :

Montrons cette inclusion :

Si $f \in H^{-1}(Q)^d$, on peut caractériser f par $f = f_0 + \partial_t f_t + \partial_1 f_1 + \dots + \partial_d f_d$. Or, en posant $k_1 = f_0 + \partial_t f_t$ et $k_2 = \partial_1 f_1 + \dots + \partial_d f_d$, on voit que

$$\|k_1\|_{H^{-1}(0, T_m)}^2 = \|f_0\|_{L^2(0, T_m)}^2 + \|f_t\|_{L^2(0, T_m)}^2 \in L^2(\Omega)$$

et $k_2 = \partial_1 f_1 + \dots + \partial_d f_d$ avec $\|f_i\|_{L^2(0, T_m)} \in L^2(\Omega)$. Ainsi cela montre que $k_1 \in L^2(\Omega; H^{-1}(0, T_m))$ et que $k_2 \in H^{-1}(\Omega; L^2(0, T_m))$. Ces deux espaces sont inclus dans $\mathcal{D}'(\Omega; H^{-1}(0, T_m))$, d'où le résultat. \square

Grâce au lemme, on peut appliquer le théorème de Rham avec $E = H^{-1}(0, T_m)$, ce qui prouve alors l'existence de $q \in \mathcal{D}'(\Omega; H^{-1}(0, T_m))$ telle que

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mu}{k^2(t)} \Delta u + \frac{k'}{k} x \cdot \nabla u + f = \nabla q$$

On voit donc que $\nabla q \in H^{-1}(Q)$. En posant $p = k \times q$, on obtient finalement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{k^2} \Delta u - \frac{k'}{k} x \cdot \nabla u + \frac{1}{k} \nabla p = f$$

A noter que si Ω est suffisamment régulier, le fait qu'il soit borné permet de montrer que $p \in L^2(\Omega; H^{-1}(\Omega))$ (voir théorème 5.5, référence [50]).

B.5 Propriétés de la solution

Dans cette partie, nous décrivons quelques propriétés importantes. Nous montrons l'unicité de la solution, donnons des précisions sur sa régularité et étendons nos résultats à une condition de bord non homogène.

- Comme $\operatorname{div}(u) = 0$ faiblement et que u_m tend vers u faiblement dans $L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega))$, alors u_m tend vers u dans $L^2(0, T_m; V)$ faiblement : $u \in L^2(0, T_m; V)$.
- En fait u à une plus grande régularité, on peut montrer [50] que $u \in C(0, T_m; H)$. Dans ce cas, l'égalité pour tout v

$$\int_{\Omega} u(0, \cdot)v = \int_{\Omega} u_0 v$$

montre que $u(0, \cdot) = u_0$ en prenant $v = u(0, \cdot) - u_0$.

- L'unicité se démontre à partir des inégalités obtenues sur les u_m dans la partie B.3 :

$$\int_{\Omega} u_m^2 \leq h(t) + \int_0^t h(s).a(s)e^{\int_s^t a(r)dr} ds$$

Etant donné que a est borné par une constante C , que $t \in]0, T_m[$ et que $\|u\|_{L^2(\Omega)}(0) = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ on obtient l'inégalité

$$\int_0^{T_m} \int_{\Omega} u_m^2 \leq \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) (T_m \times \operatorname{Max}(1, Ce^{CT_m}))$$

Ce qui donne la même inégalité pour u en faisant tendre m vers l'infini. On peut de la même façon utiliser l'inégalité sur ∇u_m trouvée à la partie B.3 et montrer qu'elle est majorée par un terme du type $K \times \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$. Ainsi, si $u_0 = 0$ et $f = 0$, alors $u = 0$ dans $L^2(Q)^d$ et $\nabla u = 0$ dans $L^2(Q)^{d^2}$, ce qui prouve l'unicité compte tenu de la linéarité de l'équation.

- Dans le cas où un écoulement est fixé au bord (conditions de Dirichlet), on suppose que cet écoulement coïncide sur le bord avec une fonction $g \in L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega)^d)$ vérifiant
 - $\frac{\partial g}{\partial t} \in L^2(0, T_m; H^{-1}(\Omega)^d)$
 - $\operatorname{div}(g) = 0$
 - $u_0 - g(0) \in H$

Ainsi, on peut chercher une solution au problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [x \cdot \nabla u] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta u + \frac{1}{k(t)} \nabla P = f & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{sur } Q \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u - g \in L^2(0, T_m; V) & \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

en posant $w = u - g$, ce qui donne une nouvelle équation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k'(t)}{k(t)} [x \cdot \nabla w] - \frac{\mu}{k(t)^2} \Delta w + \frac{1}{k(t)} \nabla P = f + \frac{\mu}{k^2} \Delta g - \frac{k'}{k} x \cdot \nabla g - \frac{\partial g}{\partial t} & \text{sur } Q \\ \operatorname{div}(w) = 0 & \text{sur } Q \\ w(0, \cdot) \in H & \\ w \in L^2(0, T_m; V) & \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

On peut ensuite appliquer les résultats précédents à cette équation.

B.6 Conclusion

Ainsi nous avons montré que la solution de l'équation 5.2 existe et est unique. Cela prouve donc que l'équation de Stokes en domaine variable a bien une unique solution. Ces informations sont indispensables quand on cherche à la résoudre numériquement. En effet s'il nous manque par exemple l'unicité, le schéma numérique peut osciller sans cesse entre les différentes solutions. A noter que cette équation est très proche des équations classiques de Stokes et que les démonstrations ci-dessus en sont une légère variante, avec un terme supplémentaire en $x \cdot \nabla u$. Il n'est donc pas du tout surprenant que la solution existe et soit unique. Il est important de citer cette preuve ici car elle constitue la base des travaux effectués au chapitre 5. En particulier, on voit que la méthode de discrétisation utilisée dans ce chapitre 5 et la démonstration de l'existence sont basées sur le même principe : des espaces d'approximation de dimensions finies.

Bibliographie

- [1] Allen J.L., Frantz I.D., and Fredberg J.J., Regional alveolar pressure during periodic flow. Dual manifestations of gas inertia, *J. Clin. Invest.*, **76**, 620 (1985).
- [2] Andrade Jr. J.S, *et al.*, Asymmetric Flow in Symmetric Branched Structures, *Phys. Rev. Let.*, **81**, 926 (1998);
M. P. Almeida *et al.*, Fluid flow through ramified structures, *Phys. Rev. E*, **60**, 5486 (1999).
- [3] Bejan A., Shape and Structure, From Engineering to Nature, *Cambridge University Press* (2000).
- [4] Beck K.C. and Wilson T.A., Variance of ventilation during exercise, *J. Appl. Physiol.*, **90**, 2151 (2001).
- [5] Bejan A., Shape and Structure from Engineering to Nature, *Cambridge University Press* (2000).
- [6] Bernot M., Caselles V., Morel J.M., Are there infinite irrigation trees?, *preprint CMLA* (2003).
- [7] Bony J.M., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Editions de l'Ecole Polytechnique* (2001).
- [8] Bossavit A., Electromagnétisme, en vue de la modélisation, SpringerVerlag (1993).
- [9] Braess D., Finite elements, *Cambridge University Press* (2001).
- [10] Brézis H., Analyse fonctionnelle, *Dunod* (1999).
- [11] Brezzi F., Fortin M., Mixed and Hybrid Finite Element Methods, *Springer-Verlag* (1991).
- [12] Brown J. H., West G. B., Enquist B.J., Scaling in Biology, *Oxford University Press* (2000).
- [13] Calder III W.A., Size, function, and life history, *Dover Publications, inc. Mineola, New York* (1996).
- [14] Carbou G., Fabrie P., Boundary Layer for a Penalization Methode for Viscous Incompressible Flow, soumis à *Advance in Differentiel Equations* (2003).
- [15] Chang H.K., and Paiva M., Respiratory Physiology, *Dekker, New York*, p. 63 (1989).
- [16] Comer J.K., Kleinstreuer C., and Zhang Z., Flow Structures and Particle Deposition Patterns in Double Bifurcation Airway Models, Part 1 : Air Flow Fields, *J. Fluid Mech.*, **435**, 25 (2001).
- [17] Dejours P., Principles of comparative respiratory physiology, *Elsevier/North-Holland Biomedical Press* (1982).

- [18] Euvrard D., Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson* (1994).
- [19] Felici M., Physique du transport diffusif de l'oxygène dans le poumon humain, *Thèse de l'École Polytechnique* sous la direction de B. Sapoval (2003) (<http://pmc.polytechnique.fr/maf/total.pdf>)
- [20] Felici M., Filoche M., Sapoval B., Diffusional screening in the human pulmonary acinus, *J. Appl. Physiol.*, **94**, 2010 (2003).
- [21] Felici M., Sapoval B., Filoche M., Renormalized random walk study of the efficiency of the mammalian pulmonary acinus, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 068101 (2004).
- [22] Galdi G.P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Volume I, Linearised Steady Problems, *Springer Tracts in Natural Philosophy*, **38** (1998).
- [23] Galdi G.P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Volume II, Nonlinear Steady Problems, *Springer Tracts in Natural Philosophy*, **39** (1998).
- [24] Grotberg J.B., Respiratory Fluid Mechanics and Transport Processes, *Ann. Rev. Biomed. Eng.*, **3**, 421 (2001).
- [25] Hess W. R., Das Prinzip des kleinsten Kraftverbrauchs im Dienste hämodynamischer Forschung, *Archiv Anat. Physiol. 1914*, 1-62 (1914).
- [26] Hiernard E. Méthodes d'éléments finis et moindres carrés pour la résolution des équations de Navier-Stokes, *Thèse Université Paris Sud, Orsay* (2003).
- [27] Hoppeler H., Fluck M., Plasticity of skeletal muscle mitochondria : structure and function, *Med. Sci. Sports Exerc.* **35**, 95-104 (2003).
- [28] Isabey D.J., Steady and pulsatile flow distribution in a multiple branching network with physiological applications, *J. Biomech.*, **15**, 395 (1982).
- [29] Jones J.D., Comparative Physiology of Respiration, *Edward Arnold* (1972)
- [30] Kitaoka H., Ryuji T., Suki B., A three-dimensional model of the human airway tree, *J. Appl. Physiol.*, **87**, 2207-2217 (1999).
- [31] Kitaoka H., Tamura S., Takaki R., A three-dimensional model of the human pulmonary acinus, *J. Appl. Physiol.*, **88**, 2260-2268 (2000)
- [32] Mandelbrot B.B., The Fractal Geometry of Nature, *W. H. Freeman, San Francisco* (1982).
- [33] Martonen T.B., Guan X., and Schreck R.M., Fluid dynamics in airway bifurcations : I. Primary flows, *Inhal. Toxicol.*, **13**, 261 (2001).
- [34] Mauroy B., Filoche M., Andrade Jr. J.S., and Sapoval B., Interplay between geometry and flow distribution in an airway tree, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 148101 1-4 (2003).
- [35] Mauroy B., Filoche M., Weibel E.R., et Sapoval B., *An optimal bronchial tree may be dangerous.*, *Nature*, 427, 633-636 (2004).
- [36] Murray C. D., The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, **12**, 207-214 (1926).
- [37] Nelson T.R. and Manchester D.K., Modeling of lung morphogenesis using fractal geometries, *IEEE Trans. on Med. Imag.*, **7**, 321 (1988).

- [38] Newman W.I., Turcotte D.L., and Gabrielov A.M., Fractal trees with side branching, *Fractals*, **5**, 603 (1997).
- [39] Pedley T.J., Schroter R.C., and Sudlow M.F. , Bioengineering Aspects of the Lung, *edited by J. B. West (Dekker, New York (1977))*.
- [40] Pedley T.J., Shroter R.C. and Sudlow M.F., The prediction of pressure drop and variation of resistance within the human bronchial airways, *Respiratory Physiology*, **9**, 387 (1970).
- [41] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Numerical Recipes, *Cambridge University Press (1988)*.
- [42] Que C. L., Kenyon C.M., Olivenstein R., Macklem P.T., Maksym G.N., Homeokinesis and short-term variability of human airway caliber, *J. Appl. Physiol.*, **91**, 1131-1141 (2001).
- [43] Sapoval B., Filoche M. and Weibel E.R., Diffusion Screening, Acinus Size and Optimal Design of Mammalian Lungs, *in Fractals in Biology and Medecine, Eds G. A. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher and E. R. Weibel, (Birkhauser, Bâle) pp 25-38 (2002)*.
- [44] Sapoval B., Filoche M. and Weibel E.R., Smaller is better - but not too small : A physical scale for the design of the mammalian pulmonary acinus, *PNAS*, **99**, 10411-10416, (2002).
- [45] Sapoval B., Transfer to and across irregular membranes modelled by fractal geometry, *in Fractals in Biology and Medecine, T.F. Nonnenmacher, G.A. Losa, E.R. Weibel, Birkhäuser-Verlag, Bâle pp. 241-249, (1994)*.
- [46] Sapoval B., Universalités et fractales, *Flammarion, Paris (1997)*.
- [47] Schmidt-Nielsen K., Scaling, why is animal size so important ?, *Cambridge University Press (1995)*.
- [48] Schreck R.M., Laminar flow through bifurcations with applications to the human lung, *Northwestern University thesis (1972)*.
- [49] Shlesinger M.F. and West B.J., Complex fractal dimension of the bronchial tree, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 2106 (1991).
- [50] Simon J., Equations de Navier-Stokes, *Cours de DEA, Université Blaise-Pascal, Clermont-Ferrand (2002-2003)*.
- [51] Simulog, *Manuel technique N3S*.
- [52] Simulog, *Manuel utilisateur N3S*.
- [53] Simulog, *Manuel utilisateur de Simail*.
- [54] Slutsky A.S., Berdine G.G., and Drazen J.M., Steady flow in a model of human central airways, *J. Appl. Physiol.*, **49**, 417 (1980).
- [55] Snyder B., Dantzker D.R., and Jaeger M.J., Flow partitioning in symmetric cascades of branches, *J. Appl. Physiol.*, **51**, 598 (1981).
- [56] Snyder B. and Jaeger M.J., Lobar flow patterns in a hollow cast of canine central airways, *J. Appl. Physiol.*, **54**, 749 (1983).
- [57] Strikwerda J.C., Finite difference schemes and partial differential equations, Pacific Grove, California - Wadsworth & Brooks (1989)

- [58] Suki B. *et al.*, Avalanches and power-law behaviour in lung inflation, *Nature*, **368**, 615 (1994)
Barabasi A.-L. *et al.*, Avalanches in the lung : A statistical mechanical model, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 2192 (1996).
- [59] Tsuda A., and Fredberg J.J., Periodic flow at airway bifurcations. I. Development of steady pressure differences, *J. Appl. Physiol.*, **69**, 546 (1990) ; *ibid.*, **69**, 553 (1990).
- [60] Weibel E. R., Design of airways and blood vessels considered as branching trees, *In : The Lung : Scientific Foundations, Vol. 1.* (R.G. Crystal, J.B. West, E.R. Weibel and PJ Barnes eds) Lippincott-Raven Publishers, Philadelphia 1061-1071, 2nd edition (1997).
- [61] Weibel E.R., Morphometry of the Human Lung, *Springer-Verlag* (1963).
- [62] Weibel E.R., Symmorphosis, *Harvard University Press* (2000).
- [63] Weibel E.R., The Pathway for Oxygen, *Harvard Univ. Press* (1984).
- [64] West B.J., Barghava, V. and Goldberger, A.L., Beyond the principle of similitude : renormalization in the bronchial tree. *J.Appl.Physiol.* **60**, 1089-1097 (1986).
- [65] West B.J., and Shlesinger M.F., On the Uniquity of 1/f Noise, *Int. J. Mod. Phys. B* **3**, 795 (1989).
- [66] West G.B., Brown J.H. and Enquist B.J., A general model for the origin of allometric scaling laws in biology, *Science*, **276**, 122-126 (1997).
- [67] West J.B., Regional differences in the lung, *Academic Press* (1977)
- [68] Wilber R.L., Rundell K.W., Szmedra L., Jenkinson D.M., Im J., and Drake S.D., Incidence of exercise-induced bronchospasm in Olympic winter sport athletes., *Med. Sci. Sports Exerc.* **32**, 732-737 (2000).
- [69] Wilquem F. and Degrez G., Numerical modeling of steady inspiratory airflow through a three-generation model of the human central airways, *J. Biomech. Eng.*, **119**, 59 (1997).
- [70] Zhao Y., Brunskill C.T., and Lieber B.B., Inspiratory and Expiratory Steady Flow Analysis in a Model Symmetrically Bifurcating Airway, *J. Biomech. Eng.*, **119**, 52 (1997).